

Test

PROBLEMA N.º 1

El valor de x en $2^x = 3$ es

- A) 1 B) 1,7 C) $\log_2 3$
 D) $\log_3 2$ E) 1,5

Resolución

Por la identidad fundamental logarítmica

$$2^x = 3 = 2^{\log_2 3}$$

Entonces, $2^x = 2^{\log_2 3}$

$$\therefore x = \log_2 3$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 2

La suma de los valores de x que verifican la ecuación $\log_2(x^2 - 1) = 3$ es igual a

- A) 0 B) 1 C) 3
 D) 9 E) 6

Resolución

Resolvemos la ecuación así

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 1) = 3 &\Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \wedge x^2 - 1 = 2^3 \\ &\Leftrightarrow x^2 > 1 \wedge x^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 > 1 \wedge (x = 3 \vee x = -3) \end{aligned}$$

Como el cuadrado de $x_1 = 3 \wedge x_2 = -3$ es mayor que uno, entonces ambos son soluciones.

$$\therefore x_1 + x_2 = 3 + (-3) = 0$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 3

El valor negativo de x que verifica $2^{3x^2} = 8$ es

- A) -1 B) -2 C) -3
 D) -4 E) -8

Resolución

Resolvemos la ecuación así

$$2^{3x^2} = 8 \rightarrow 2^{3x^2} = 2^{3^1} \rightarrow x^2 = 1$$

Como x debe ser negativo, entonces $x = -1$.

Clave **A**

PROBLEMA N.º 4

Si $\log 2 = a$ y $\log 3 = b$, entonces el logaritmo de 18 es

- A) $3a + b$ B) $3b + a$ C) $a + b$
 D) $2a + b$ E) $2b + a$

Resolución

Sabemos que

$$\log 18 = \log(3^2 \cdot 2) = \log 3^2 + \log 2$$

$$\rightarrow \log 18 = 2\log 3 + \log 2$$

$$\therefore \log 18 = 2b + a$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 5

Calcule el valor de S.

$$S = 2^{\log_4 5} - 5^{\log_4 2} + 6^{\log_6 7} - 12^{\log_{12} 10}$$

- A) 3 B) -3 C) 1
D) -1 E) 0

Resolución

Sabemos que

$$2^{\log_4 5} = 5^{\log_4 2} \wedge b^{\log_b n} = n; \forall n > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$$

$$\text{Luego: } S = \underbrace{5^{\log_4 2} - 5^{\log_4 2}}_0 + \underbrace{7 - 10}_{-3}$$

$$\rightarrow S = 0 + -3$$

$$\therefore S = -3$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 6

Simplifique la expresión

$$E = \log_2 \tan 1^\circ \cdot \log_2 \tan 2^\circ \dots \log_2 \tan 45^\circ.$$

- A) π B) $\pi/2$ C) 1
D) 0 E) $\pi/3$

Resolución

Note que E es el producto de una multiplicación donde todos los factores son logaritmos y uno de ellos es $\log_2 \tan 45^\circ$. Como $\tan 45^\circ = 1$, entonces $\log_2 \tan 45^\circ = \log_2 1 = 0$. Entonces $E = 0$.

Clave **D**

PROBLEMA N.º 7

Resuelva la ecuación.

$$2^x - 2^{\frac{x}{2}} = 6$$

- A) $\{\log_2 9\}$
B) $\{\log_9 2\}$
C) $\{\log_2 3\}$
D) $\{1; 0\}$
E) $\{1; \log_2 9\}$

Resolución

Escribimos la ecuación exponencial así

$$2^x - \sqrt{2^x} - 6 = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{2^x}^2 - \sqrt{2^x} - 6 = 0; 2^x > 0$$

Factorizamos por aspa simple

$$\rightarrow (\sqrt{2^x} - 3)(\underbrace{\sqrt{2^x} + 2}_{\text{positivo}}) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{2^x} - 3 = 0 \rightarrow \sqrt{2^x} = 3$$

$$\rightarrow 2^x = 3^2 \rightarrow x = \log_2 9$$

$$\therefore CS = \{\log_2 9\}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 8

Resuelva la inecuación.

$$4^x - 2^{x+1} - 3 \leq 0$$

- A) $x \leq 1$
B) $x \leq 2$
C) $x \leq \log_2 3$
D) $x \geq \log_2 3$
E) $x \geq 1$

Resolución

Escribimos la inecuación así

$$(2^x)^2 - 2(2^x) - 3 \leq 0$$

Factorizamos por aspa simple

$$(2^x - 3) \underbrace{(2^x + 1)}_{\text{positivo}} \leq 0$$

$$\rightarrow 2^x - 3 \leq 0 \rightarrow 2^x \leq 3$$

$$\rightarrow 2^x \leq 2^{\log_2 3} \rightarrow x \leq \log_2 3$$

$$\therefore CS = (-\infty; \log_2 3]$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 9

Calcule el mayor valor de x que verifica la inecuación $(2^x - 1)(2^x + 3)(2^x - 8) \leq 0$.

- A) 3
- B) 2
- C) 1
- D) 0
- E) No existe

Resolución

Sabemos que $2^x > 0; \forall x \in \mathbb{R}$, entonces

$$(2^x - 1) \underbrace{(2^x + 3)}_{\text{positivo}} (2^x - 8) \leq 0 \rightarrow (2^x - 1)(2^x - 8) \leq 0$$

Hacemos $2^x = t$; entonces: $(t - 1)(t - 8) \leq 0$
Resolvemos por el método de los puntos críticos.



$$\rightarrow 1 \leq t \leq 8 \rightarrow 1 \leq 2^x \leq 8$$

$$\rightarrow 2^0 \leq 2^x \leq 2^3 \rightarrow 0 \leq x \leq 3$$

Por lo tanto, el mayor valor de x es 3.

Clave **A**

PROBLEMA N.º 10

Si $\log 2 = 0,301030$ y $\log 3 = 0,47712$, ¿cuántas cifras tiene el número $N = 2^{50} \times 3^{40}$?

- A) 33
- B) 32
- C) 36
- D) 35
- E) 34

Resolución

Recuerde que si $\log N = \overline{m, abc \dots pq}$, entonces el número de cifras de N es $(m + 1)$.

$$\text{Luego, si } N = 2^{50} \times 3^{40}$$

$$\rightarrow \log N = \log(2^{50} \times 3^{40})$$

$$= \log 2^{50} + \log 3^{40}$$

$$= 50 \log 2 + 40 \log 3$$

$$= 50(0,301030) + 40(0,47712)$$

$$= 15,05150 + 19,0848$$

$$\log N = 34,13630$$

Por lo tanto, el número de cifras de N es 35.

Clave **D**

PROBLEMA N.º 11

Resuelva la inecuación $\log_2(x^2 - 1) < 4$ e indique el mayor entero que la verifica.

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Resolución

Resolvemos la inecuación logarítmica así

$$\log_2(x^2 - 1) < 4 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \wedge \log_2(x^2 - 1) < \log_2 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 1 \wedge x^2 - 1 < 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 1 \wedge x^2 < 17$$

$$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 17 \text{ (extraemos raíz cuadrada)}$$

$$\Leftrightarrow 1 < |x| < \sqrt{17} < 5$$

Como queremos el mayor entero que verifica,

$$\rightarrow |x| \in \{2; 3; 4\} \rightarrow x_{\max} = 4$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 12

¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación

$$\log_{\frac{1}{2}} x = x?$$

A) 2

B) 0

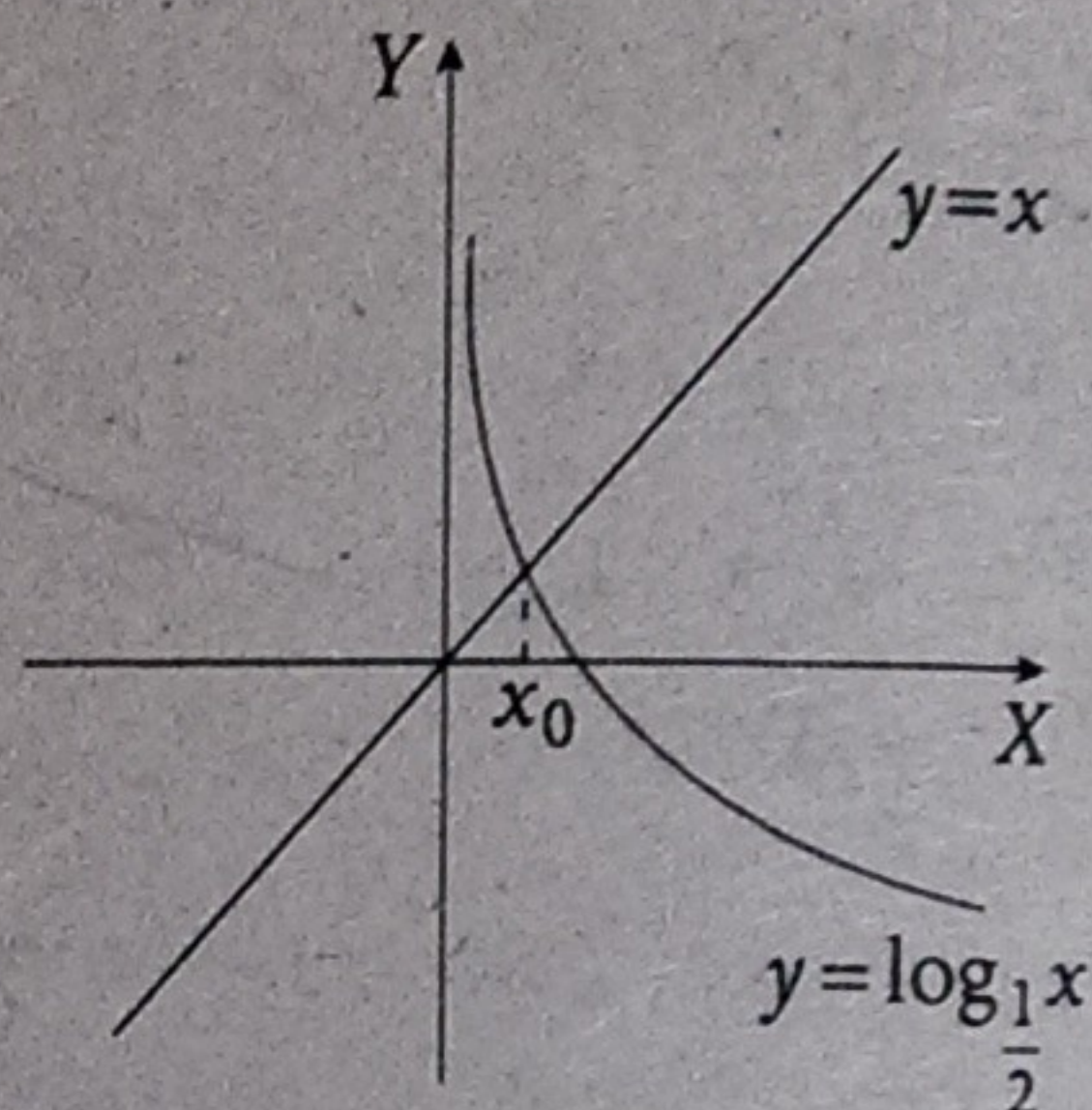
C) 1

D) 3

E) 4

Resolución

Resolvemos gráficamente



Note que

$$\log_{\frac{1}{2}} x = x \Leftrightarrow x = x_0 \text{ con } x_0 \in (0; 1)$$

Por lo tanto, hay una única solución.

Clave **C**

Problemas resueltos

NIVEL I

PROBLEMA N.º 1

Calcule el valor de x que verifica la ecuación $3^{\sqrt{x}} = 2$.

- A) $\log_3 4$ B) $\log_4 3$ C) $\log_3 2$
D) $\log_2 3$ E) $(\log_3 2)^2$

Resolución

Como $3^{\sqrt{x}} = 2$ entonces $\sqrt{x} = \log_3 2$

$$\rightarrow \sqrt{x}^2 = (\log_3 2)^2 \rightarrow x = (\log_3 2)^2$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 2

Reduzca la expresión

$$E = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \dots \log_{m+1} m$$

- A) $\log_2 m$ B) $\log_3 m$ C) $\log_m 3$
D) $\log_m 2$ E) $\log_{m+1} 2$

Resolución

La expresión logarítmica

$$E = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \dots \log_m (m-1) \cdot \log_{(m+1)} m$$

podemos escribirla así

$$E = \log_{(m+1)} m \cdot \log_m (m-1) \dots \log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2$$

$$\therefore E = \log_{(m+1)} 2$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 3

Si se cumple que

$$\log_a bc = x^n; \log_b ac = y^n; \log_c ab = z^n; \forall n \in \mathbb{N},$$

calcule el valor de E .

$$E = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{1}{x^n + 1} + \frac{1}{y^n + 1} + \frac{1}{z^n + 1}}$$

- A) $2n$ B) n C) n^2
D) $1/n$ E) $n/2$

Resolución

$\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$x^n + 1 = \log_a bc + 1 \rightarrow x^n + 1 = \log_a (abc)$$

$$y^n + 1 = \log_b ac + 1 \rightarrow y^n + 1 = \log_b (abc)$$

$$z^n + 1 = \log_c ab + 1 \rightarrow z^n + 1 = \log_c (abc)$$

Luego

$$E = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{1}{x^n + 1} + \frac{1}{y^n + 1} + \frac{1}{z^n + 1}}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{1}{\log_a (abc)} + \frac{1}{\log_b (abc)} + \frac{1}{\log_c (abc)}}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\log_{abc} abc} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{1}$$

$$\therefore E = \frac{1}{n}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 4

Calcule el logaritmo de $a^m \cdot \sqrt[n]{a}$ en base $a^n \cdot \sqrt[m]{a}$, donde $m; n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$; $a > 0 \wedge a \neq 1$.

- A) n/m B) m C) mn
D) n E) m/n

Resolución

Dados $m; n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$; $a > 0 \wedge a \neq 1$
debemos calcular el logaritmo de $N = a^m \cdot \sqrt[n]{a}$
en base $b = a^n \cdot \sqrt[m]{a}$.

$$\text{Como } N = a^m \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{mn+1}{n}} \wedge b = a^n \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{mn+1}{m}}$$

$$\rightarrow \log_b N = \log_{a^{\frac{mn+1}{m}}} a^{\frac{mn+1}{n}}$$

$$= \log_b N = \frac{\frac{mn+1}{n}}{\frac{mn+1}{m}} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \log_b N = \frac{m}{n}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 5

Sean $a; b; c$ tres números positivos diferentes de 1. Si $x = \log_b c$; $y = \log_a c$, el valor de $\log_{ab} c$ es r ; $ab \neq 1$. Calcule el valor de r .

- A) $\frac{x^2}{x+y}$
B) $\frac{x^2 y^2}{x+y}$

$$C) \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$D) \frac{x+y}{xy}$$

$$E) \frac{xy}{x+y}$$

Resolución

Sean $a; b; c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ tal que

$$\log_b c = x \wedge \log_a c = y; ab \neq 1$$

$$\rightarrow b^x = c \wedge a^y = c; ab \neq 1$$

$$\rightarrow b^{xy} = c^y \wedge a^{xy} = c^x$$

$$\rightarrow (ab)^{xy} = c^{x+y}$$

Luego

$$\log_{ab} c = \log_{(ab)^{xy}} c^{xy} = \log_{c^{x+y}} c^{xy} = \frac{xy}{x+y}$$

$$\therefore \log_{ab} c = \frac{xy}{x+y}$$

Clave

PROBLEMA N.º 6

Consideremos los números

$$b_1 = 2; \quad b_4 = 4096;$$

$$b_2 = 4; \quad b_5 = 2^{20};$$

$$b_3 = 64; \quad b_6 = 2^{30}.$$

$$\text{Si } (\log_{b_1} x + \log_{b_2} x + \log_{b_3} x + \dots + \log_{b_6} x) = \frac{55}{6}$$

calcule el valor de x .

- A) 16
B) 128
C) 32
D) 64
E) 512

Resolución

Reemplazamos los valores de los b_k ; $k=1; 2; 3; 4; 5; 6$ en la ecuación logarítmica.

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x + \log_{2^4} x + \log_{2^5} x + \log_{2^6} x = \frac{55}{6}$$

$$\rightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{6} \log x + \frac{1}{12} \log x + \frac{1}{20} \log x + \frac{1}{30} \log x = \frac{55}{6}$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right) \log_2 x = \frac{55}{6} \rightarrow \left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \log_2 x = \frac{55}{6}$$

$$\rightarrow \left(2 - \frac{1}{6}\right) \log_2 x = \frac{55}{6} \rightarrow \frac{11}{6} \log_2 x = \frac{55}{6}$$

$$\rightarrow \log_2 x = \frac{55}{11} \rightarrow \log_2 x = 5$$

$$\therefore x = 2^5 = 32$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 7

Halle el conjunto solución de la inecuación, $2e^{-2x} + e^{-3x} < 3e^{-x}$.

- A) \mathbb{R} B) $\mathbb{R} - \{0\}$ C) $[0; +\infty)$ D) $\langle 0; +\infty)$ E) $\langle -\infty; 0)$

Resolución

Escribimos la inecuación así

$$(e^{-x})^3 + 2(e^{-x})^2 - 3(e^{-x}) < 0 \rightarrow (e^{-x})[(e^{-x})^2 + 2(e^{-x}) - 3] < 0$$

Recuerde que $e^{-x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\rightarrow (e^{-x})^2 + 2(e^{-x}) - 3 < 0 \rightarrow \underbrace{(e^{-x} + 3)}_{(+)}(e^{-x} - 1) < 0$$

$$\rightarrow e^{-x} - 1 < 0 \rightarrow e^{-x} < 1 \rightarrow e^{-x} < e^0 \rightarrow -x < 0$$

$$\rightarrow x > 0$$

$$\therefore \text{CS} = \mathbb{R}^+ = \langle 0; +\infty)$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 8

Si $a < 0 \wedge b < 0$, calcule el valor del número real x que satisface la siguiente ecuación

$$a^{(\log_b \log x)(\log_a b)} + b^{(\log_a \log x)(\log_b a)} = 1.$$

- A) 10 B) $\sqrt{10}$ C) 100
D) ab E) $a+b$

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$a^{(\log_a b)(\log_b \log x)} + b^{(\log_b a)(\log_a \log x)} = 1;$$

$$a < 0 \wedge b < 0$$

$$\rightarrow (a^{\log_a b})^{\log_b \log x} + (b^{\log_b a})^{\log_a \log x} = 1;$$

$$a < 0 \wedge b < 0$$

$$\rightarrow b^{\log_b \log x} + a^{\log_a \log x} = 1; a > 0 \wedge b > 0$$

$$\rightarrow \log x + \log x = 1; a > 0 \wedge b > 0$$

$$\rightarrow 2\log x = 1;$$

$$\rightarrow \log x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \sqrt{10}$$

Clave **B**

Resolución

Equivalentemente escribimos el sistema,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 & (II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0; y > 0 \end{cases}$$

De la ecuación (II): $\frac{x}{y} = 10$

$$\rightarrow x = 10y$$

Reemplazamos en la ecuación (I)

$$(10y)^2 - y^2 = 11$$

$$\rightarrow 100y^2 - y^2 = 11$$

$$\rightarrow 99y^2 = 11$$

$$\rightarrow y^2 = \frac{1}{9} \wedge y < 0$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

Luego

$$x = 10\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{10}{3}.$$

$$\therefore x + y = -\frac{10}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 9

Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x - \log y = 1, \end{cases}$$

¿qué valor obtenemos para $x+y$?

- A) 16/15 B) 9/2 C) 13/3
D) 13/2 E) 11/3

PROBLEMA N.º 10

Si z es una solución de la ecuación

$$\log_4 [\log_3 (\log_2 x)] = 0,$$

calcule el valor de $z^2 + z + 1$.

- A) 70 B) 73 C) 80
D) 81 E) 84

Resolución

Como z es solución entonces

$$\log_4 [\log_3 (\log_2 z)] = 0$$

$$\rightarrow \log_3 (\log_2 z) = 1$$

$$\rightarrow \log_2 z = 3$$

$$\rightarrow z = 2^3 \rightarrow z = 8$$

$$\therefore z^2 + z + 1 = 8^2 + 8 + 1 = 73$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 11

Determine el valor de $(2b)^{2x} - (2b)^{-2x}$ si se sabe que $(2b)^{8x} + (2b)^{-8x} = 7$ \wedge $0 < b < \frac{1}{2}$.

- A) 3 B) -3 C) 1
D) -2 E) 2

Resolución

Como $(2b)^{8x} + (2b)^{-8x} = 7$; $0 < b < \frac{1}{2}$

$$\rightarrow (2b)^{8x} + (2b)^{-8x} + 2 \underbrace{(2b)^{4x} \cdot (2b)^{-4x}}_1 = 9; \quad 0 < 2b < 1$$

$$\rightarrow [(2b)^{4x} + (2b)^{-4x}]^2 = 3^2; \quad 0 < 2b < 1$$

$$\rightarrow (2b)^{4x} + (2b)^{-4x} = 3; \quad 0 < 2b < 1$$

$$\rightarrow (2b)^{4x} + (2b)^{-4x} = -2 \underbrace{(2b)^{2x} (2b)^{-2x}}_1 = 1; \quad 0 < 2b < 1$$

$$\rightarrow [(2b)^{2x} - (2b)^{-2x}]^2 = 1; \quad 0 < 2b < 1$$

$$\therefore (2b)^{2x} - (2b)^{-2x} = 1$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 12

Calcule el valor de x que satisface la ecuación

$$\sqrt{x + \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}}}}$$

- A) $1/4$ B) $1/2$ C) $5/8$
D) $3/8$ E) $3/4$

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$\sqrt{x + \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}}}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x + \log_{\sqrt{2}} (\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2})} = \sqrt{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[8]{2^3}}$$

$$\rightarrow x + \log_{\sqrt{2}^{16}} (\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2})^{16} = \log_{\sqrt{2}^8} (\sqrt[8]{2^3})^8$$

$$\rightarrow x + \log_{2^8} (2^2 \cdot 2) = \log_{2^2} \sqrt{2}^3$$

$$\rightarrow x + \log_{2^8} 2^3 = \log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow x + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{8}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 13

Calcule el valor de $a - b$, de modo que se cumpla la ecuación $64^b - 8^{a+b} = 56 \cdot 2^{6a}$.

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$(8^2)^b - 8^a \cdot 8^b - 56 \cdot (2^3)^{2a} = 0$$

$$\rightarrow (8^b)^2 - 8^b \cdot 8^a - 56(8^a)^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 8^b & & -8(8^a) \\ 8^b & & 7(8^a) \end{array}$$

$$\rightarrow [8^b - 8 \cdot 8^a] \underbrace{[8^b + 7 \cdot 8^a]}_{(+)} = 0$$

Note que $8^b + 7 \cdot 8^a$ siempre es positivo

$$\rightarrow 8^b - 8 \cdot 8^a = 0$$

$$\rightarrow 8 \cdot 8^a = 8^b$$

$$\rightarrow \frac{8^a}{8^b} = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow 8^{a-b} = 8^{-1}$$

$$\therefore a - b = -1$$

Clave **C**

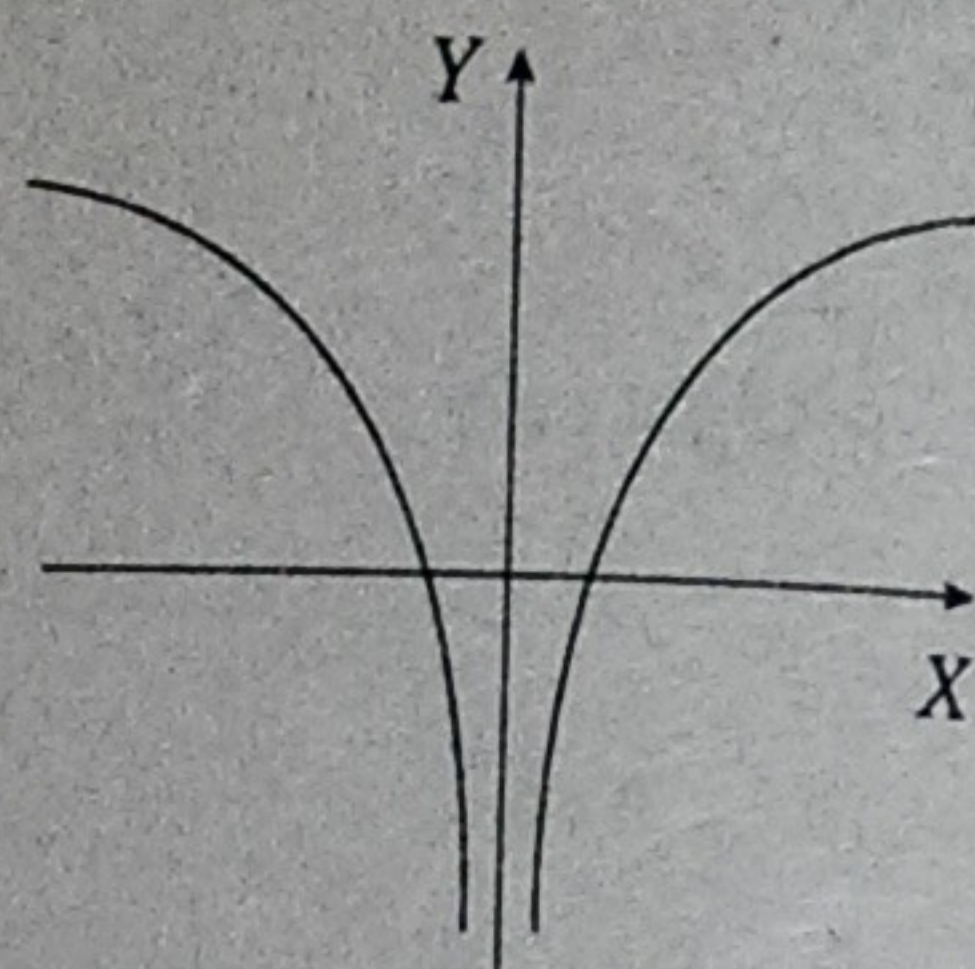
PROBLEMA N.º 14

¿Cuál de los siguientes enunciados no es una característica de la función $f(x) = \ln|x|$?

- A) f no es una función inyectiva.
- B) Conforme x se acerca a 0, $f(x)$ disminuye.
- C) Si x aumenta siendo positivo, $f(x)$ también aumenta.
- D) Si x disminuye siendo negativo, entonces $f(x)$ también disminuye.
- E) Si x disminuye siendo negativo, entonces $f(x)$ aumenta.

Resolución

Esbozamos la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$. Note que f es una función par, pues $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(-x)$. Luego su gráfica es simétrica al eje Y .



De la gráfica se observa que

- f no es una función inyectiva.
- Cuando x se aproxima a cero, $f(x)$ se aproxima al $-\infty$.
- $\forall x > 0$: si x aumenta, $f(x)$ también aumenta; es decir, f es creciente $\forall x > 0$.
- $\forall x < 0$: si x disminuye, $f(x)$ aumenta; es decir, f es decreciente $\forall x < 0$.
- Lo que no es cierto es que $\forall x < 0$: si x disminuye, $f(x)$ también disminuye.

De lo observado concluimos que no es correcta la alternativa D.

Clave **D**

PROBLEMA N.º 15

Dada la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_{\sin^2 x} \left(\log_{\sin^2 x} \left(\frac{1}{256} \right) \right) + 1 = 0,$$

calcule el valor de $|\sin x|$.

- A) 1/4 B) 1/3 C) 1/2
- D) 1/5 E) $1/\sqrt{2}$

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$\log_{\text{sen}^2 x} \left(\log_{\text{sen}^2 x} \left(\frac{1}{256} \right) \right) = -1$$

$$\rightarrow \log_{\text{sen}^2 x} \left(\frac{1}{256} \right) = (\text{sen}^2 x)^{-1}$$

$$\rightarrow (\text{sen}^2 x)^{(\text{sen}^2 x)^{-1}} = \frac{1}{256}$$

$$\rightarrow (\text{sen}^2 x)^{(\text{sen}^2 x)^{-1}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\left(\frac{1}{4} \right)^{-1}}$$

$$\rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \sqrt{\text{sen}^2 x} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore |\text{sen} x| = \frac{1}{2}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 16

Halle el conjunto de soluciones reales de la ecuación

$$10\,000^{\log x} - 4(100^{\log x}) + 4 = 0.$$

A) ϕ

B) $\{\sqrt{2}\}$

C) $\{1; \sqrt{2}\}$

D) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

E) $\{1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$(10^4)^{\log x} - 4(10^2)^{\log x} + 4 = 0; x < 0$$

$$\rightarrow (10^{\log x})^4 - 4(10^{\log x})^2 + 4 = 0; x < 0$$

$$\rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 0; x < 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 2)^2 = 0; x < 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(x + \sqrt{2})^2}_{(+)} (x - \sqrt{2})^2 = 0; x < 0$$

$$\rightarrow (x - \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\rightarrow x - \sqrt{2} = 0$$

$$\rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{CS} = \{\sqrt{2}\}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 17

Halle el conjunto solución de la inecuación

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 + 1) < -2.$$

A) $|x| > 2\sqrt{2}$ B) $|x| > 2$ C) $|x| > \sqrt{2}$

D) $|x| < 2$ E) $|x| < 2\sqrt{2}$

Resolución

Escribimos la inecuación así

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 + 1) < \log_{\frac{1}{3}} 9$$

Note que $2x^2+1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ y $b = \frac{1}{3} < 1$

$$\rightarrow 2x^2+1 > 9$$

$$\rightarrow 2x^2 > 8$$

$$\rightarrow x^2 > 4$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \rightarrow |x| > 2$$

$$\rightarrow x < -2 \vee x > 2$$

$$\therefore CS = \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 2; +\infty$$

Clave **B**

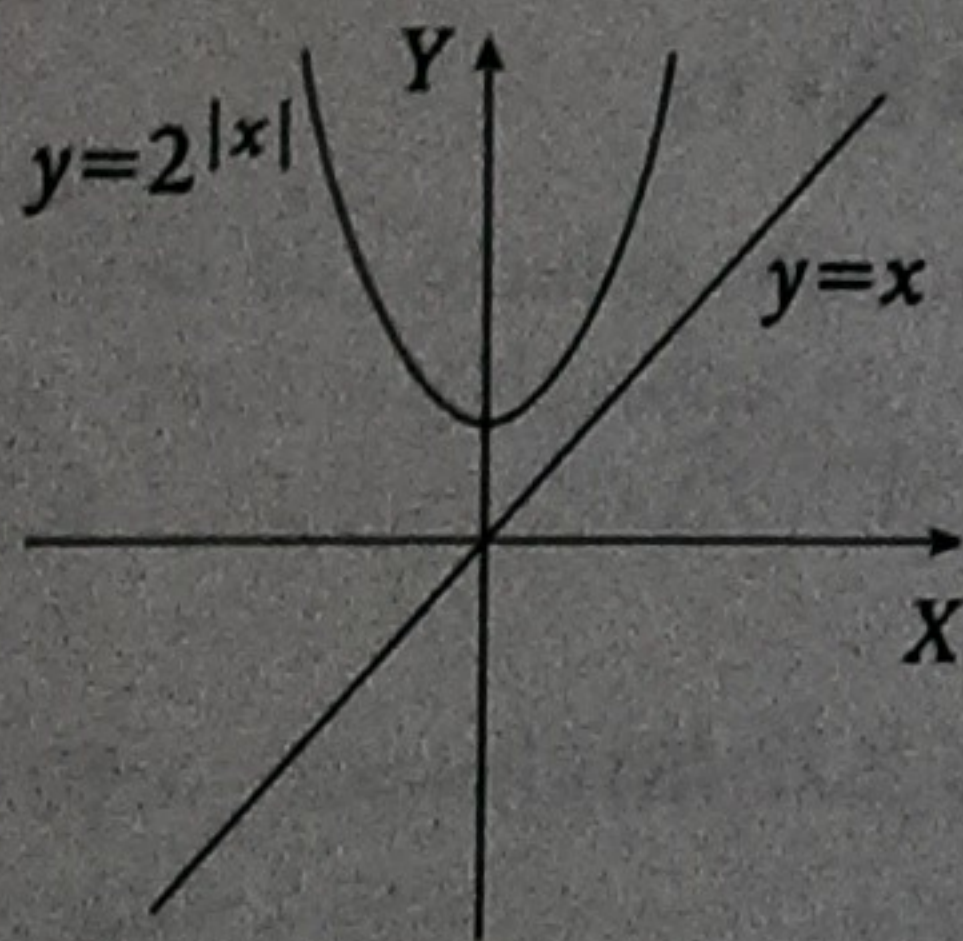
PROBLEMA N.º 18

Resuelva la inecuación $2^{|x|} > x$.

- A) \mathbb{R} B) \mathbb{R}^+ C) \mathbb{R}^-
D) \mathbb{R}_0^+ E) \mathbb{R}_0^-

Resolución

Resolvemos la inecuación $2^{|x|} > x$
Gráficamente



Note que $2^{|x|} < x; \forall x \in \mathbb{R}$
 $\therefore CS = \mathbb{R}$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 19

Resuelva la inecuación
 $4^x - 2^x \leq 6$.

- A) $x \geq 1$
B) $x \leq 1$
C) $x \geq 0$
D) $x \geq \log_2 3$
E) $x \leq \log_2 3$

Resolución

Escribimos la inecuación así

$$(2^x)^2 - 2^x - 6 \leq 0$$

$$\rightarrow (2^x - 3)(2^x + 2) \leq 0$$

Como $2^x + 2$ siempre es positivo

$$\rightarrow 2^x - 3 \leq 0$$

$$\rightarrow 2^x \leq 3$$

$$\rightarrow 2^x \leq 2^{\log_2 3}$$

$$\rightarrow x \leq \log_2 3$$

$$\therefore x \in \langle -\infty; \log_2 3 \rangle$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 20

Halle las soluciones de la ecuación logarítmica
 $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$.

- A) $x_1 = 1; x_2 = 10^4$
B) $x_1 = 10^{-2}; x_2 = 10^2$
C) $x_1 = 10^{-1}; x_2 = 10^3$
D) $x_1 = 10^{-1}; x_2 = 10^2$
E) $x_1 = 1; x_2 = 10^5$

Resolución

Tenemos $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$

$$\rightarrow x > 0 \wedge \log x \geq 0 \wedge \sqrt{\log x} = \log x^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow x > 0 \wedge x \geq 10^0 \wedge \log x = \left(\frac{1}{2} \log x\right)^2$$

$$\rightarrow \underbrace{x > 0 \wedge x \geq 1} \wedge \log x = \frac{1}{4} (\log x)^2$$

$$\rightarrow x \geq 1 \wedge 4 \log x = (\log x)^2$$

$$\rightarrow x \geq 1 \wedge (\log x)^2 - 4 \log x = 0$$

$$\rightarrow x \geq 1 \wedge \log x (\log x - 4) = 0$$

$$\rightarrow x \geq 1 \wedge (\log x = 0 \vee \log x - 4 = 0)$$

$$\rightarrow x \geq 1 \wedge (x = 10^0 \vee \log x = 4)$$

$$\rightarrow x \geq 1 \wedge (x = 1 \vee x = 10^4)$$

$$\therefore x_1 = 1; x_2 = 10^4$$

Clave **A**

NIVEL II

PROBLEMA N.º 21

Se cumple que

$$\log_2 y = 3 \wedge \log_8 \left(\frac{x^2 y^5}{2} \right) = 6,$$

calcule el valor de $\frac{|x|}{y}$.

- A) 1
- B) 1/2
- C) 1/4
- D) 1/8
- E) 1/16

Resolución

$$\text{Como } \log_2 y = 3 \rightarrow y = 2^3 = 8$$

También

$$\log_8 \left(\frac{x^2 y^5}{2} \right) = 6 \rightarrow \frac{x^2 y^5}{2} = 8^6$$

$$\rightarrow x^2 \cdot y^5 = 2 \cdot 8^6$$

$$\text{Como } y = 8: x^2 \cdot 8^5 = 2 \cdot 8 \cdot 8^5$$

$$\rightarrow x^2 = 16 \rightarrow |x| = 4$$

$$\therefore \frac{|x|}{y} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 22

Reduzca la siguiente expresión

$$E = \frac{2 \cdot 5^{\log_x a} + \log_{\sqrt{3}} 3}{1 + a^{\log_x 5}}$$

Considere $x > a > \sqrt{3}$.

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 8
- E) 10

Resolución

Como $x < a < \sqrt{3}$ escribimos la expresión

$$E = \frac{2 \cdot 5^{\log_x a} + 2}{1 + a^{\log_x 5}}$$

$$\rightarrow E = \frac{2 (5^{\log_x a} + 1)}{(5^{\log_x a} + 1)}$$

$$\therefore E = 2$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 23

Calcule $\log_2 x$ si se sabe que

$$\log_x 64 \cdot \log_x a = \log_b c \log_x b \log_x x^6; \quad 1 < ab < c.$$

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$\log_x a \cdot \log_x 64 = \log_x b \cdot \log_x c \cdot \log_x x^6;$$

$$1 < ab < c \wedge x > 0$$

$$\rightarrow \log_x 64 = \log_x x^6 \rightarrow x^6 = 64 \wedge x > 0$$

$$\rightarrow x^6 = 2^6 \rightarrow x = 2$$

$$\therefore \log_2 x = 1$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 24

Indique el mayor valor de M si

$$\log_a b + \log_b c + \log_c d + \log_d a \geq M.$$

Además, $a; b; c; d \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Sabemos que $\forall a; b; c; d \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

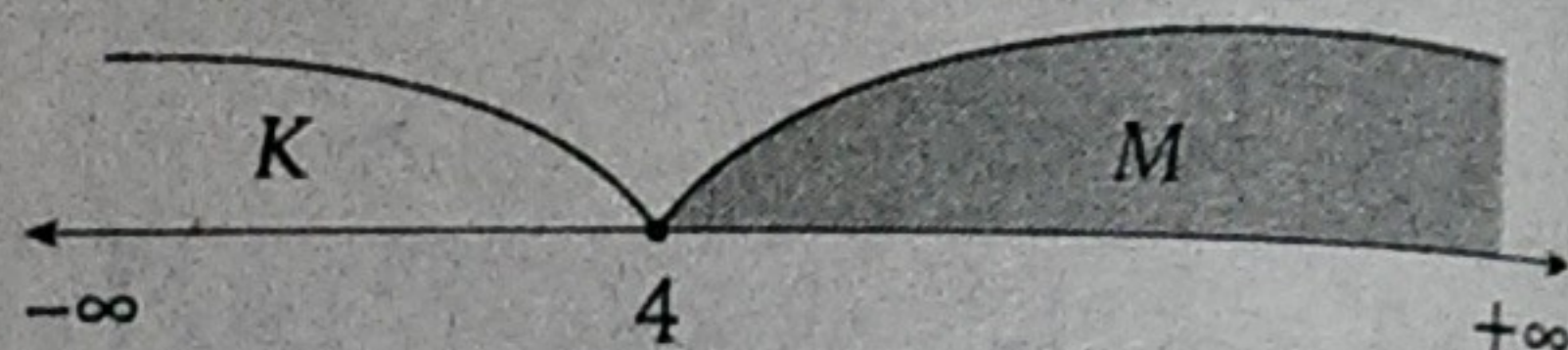
$$\frac{\log_a b + \log_b c + \log_c d + \log_d a}{4}$$

$$\geq \sqrt[4]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a}$$

$$\rightarrow \log_a b + \log_b c + \log_c d + \log_d a \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a}$$

$$\rightarrow \underbrace{\log_a b + \log_b c + \log_c d + \log_d a}_M \geq 4 \rightarrow M \geq 4$$

Gráficamente



$$\therefore K_{\text{máx}} = 4.$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 25

Si se cumple que $\log_3 n = \log_6 m = \log_{12}(m+n)$, calcule el valor de $\frac{m}{n}$.

- A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{5}$
D) $1-\sqrt{5}$ E) $1+\sqrt{5}$

Resolución

$$\text{Sea } \log_3 n = \log_6 m = \log_{12}(m+n) = x$$

$$\rightarrow n = 3^x; m = 6^x; m+n = 12^x$$

$$\text{luego, } 6^x + 3^x = 12^x$$

$$\text{Dividimos por } 3^x: 2^x + 1 = 4^x$$

$$\rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 1 = 0$$

$$\text{Luego } 2^x = y > 0$$

$$\rightarrow y^2 - y - 1 = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$\rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \wedge y > 0$$

$$\rightarrow y=2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Como } \frac{m}{n}=\frac{6^x}{3^x}=2^x \rightarrow \frac{m}{n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 26

Dada la ecuación logarítmica

$$\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6,$$

calcule la suma de sus soluciones.

A) $\log 280$ B) $\log_3 280$ C) -2

D) $\log_3 280-3$ E) 0

Resolución

Resolvemos la ecuación logarítmica así

$$\log_3(3^x-1) \cdot \log_3[3(3^x-1)]=6$$

$$\rightarrow \log_3(3^x-1)[1+\log_3(3^x-1)]=6$$

$$\text{Hacemos } \log_3(3^x-1)=y$$

$$\rightarrow y(1+y)=6$$

$$\rightarrow y^2+y-6=0$$

$$\rightarrow (y+3)(y-2)=0$$

$$\rightarrow y+3=0 \vee y-2=0$$

$$\rightarrow y=\log_3(3^x-1)=-3 \vee y=\log_3(3^x-1)=2$$

$$\rightarrow 3^x-1=3^{-3} \vee 3^x-1=3^2$$

$$\rightarrow 3^x=\frac{1}{27}+1 \vee 3^x=9+1$$

$$\rightarrow 3^{x_1}=\frac{28}{27} \vee 3^{x_2}=10$$

$$\rightarrow 3^{x_1} \cdot 3^{x_2}=\frac{28}{27} (10)$$

$$\rightarrow 3^{x_1+x_2}=\frac{280}{27}$$

$$\rightarrow x_1+x_2=\log_3\left(\frac{280}{27}\right)$$

$$\therefore x_1+x_2=\log_3 280-3$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 27

Resuelva la inecuación logarítmica

$$\log_x\left(\frac{4x+5}{6-5x}\right)<-1$$

e indique su conjunto solución.

A) ϕ B) $\left\langle 0; \frac{6}{5} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right]$

D) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ E) $\left[0; \frac{6}{5} \right]$

Resolución

Escribimos la inecuación logarítmica así

$$\log_x\left(\frac{4x+5}{6-5x}\right)<\log_x x^{-1}$$

Hallamos el CVA

$$x>0 \wedge x \neq 1 \wedge \frac{4x+5}{6-5x}>0$$

$$\text{Note que } \forall x>0: 4x+5>0$$

$$\rightarrow x>0 \wedge x \neq 1 \wedge 6-5x>0$$

$$\rightarrow x>0 \wedge x \neq 1 \wedge x<\frac{6}{5}$$

$$\rightarrow 0<x<\frac{6}{5} \wedge x \neq 1$$

$$\rightarrow 0<x<1 \wedge 1<x<\frac{6}{5}$$

Resolvemos en dos casos

I. $0 < x < 1$

$$\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x} \right) < \log_x x^{-1} \rightarrow \frac{4x+5}{6-5x} > \frac{1}{x}$$

Note que si $0 < x < 1$: $6-5x > 0$

$$\rightarrow x(4x+5) > 6-5x \wedge 5x < 6$$

$$\rightarrow 4x^2 + 5x + 5x - 6 > 0 \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow \cancel{2}(2x^2 + 5x - 3) > 0 \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow (2x-1)(x+3) > 0 \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow \left(x < -3 \vee x > \frac{1}{2} \right) \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{6}{5}$$

$$\text{Luego, } 0 < x < 1 \wedge \frac{1}{2} < x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \rightarrow x \in S_1 = \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$$

II. $1 < x < \frac{6}{5}$

$$\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x} \right) < \log_x x^{-1} \rightarrow \frac{4x+5}{6-5x} < \frac{1}{x}$$

Note que si $1 < x < \frac{6}{5}$: $6-5x > 0$

$$\rightarrow x(4x+5) < 6-5x \wedge 6 > 5x$$

$$\rightarrow 4x^2 + 5x + 5x - 6 < 0 \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow \cancel{2}(2x^2 + 5x - 3) < 0 \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow (2x-1)(x+3) < 0 \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow -3 < x < \frac{1}{2} \wedge x < \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow -3 < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{Luego, } 1 < x < \frac{6}{5} \wedge -3 < x < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x \in S_2 = \emptyset$$

Finalmente, $CS = S_1 \cup S_2$

$$\therefore CS = \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 28

Resuelva el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} \log_x e < \log_x \pi \\ 1000 \sqrt[3]{0,1} \geq 10^{2x} \end{cases}$$

e indique el número de elementos de su conjunto solución.

- A) 2 B) 0 C) 4
D) 1 E) infinito

Resolución

Equivalentemente escribimos el sistema así

$$\begin{cases} \log_x e < \log_x \pi & \text{(I)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10^3 \sqrt[3]{0,1} \geq 10^{2x} & \text{(II)} \end{cases}$$

De la inecuación (II) se tiene que $x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 2$

En (I): $\log_x e < \log_x \pi \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 2$

$\rightarrow e < \pi$ ¡Absurdo!

Así, el conjunto solución del sistema es \emptyset

Por lo tanto, el número de soluciones es cero.

Clave **B**

PROBLEMA N.º 29

Dada la ecuación logarítmica

$$\log_{ab} \left[\text{colog}_{ab} \frac{\sqrt{a}}{a} + \frac{1}{2} \log_{ab} b \right] = \log_{ab}^2 a - \log_{ab}^2 b.$$

Si $a \neq b$, calcule el valor de $\frac{a}{b}$.

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) 1

D) $\frac{1}{6}$

E) 3

Resolución

Escribimos la ecuación logarítmica así

$$\log_{ab} \left[-\log_{ab} \left(\frac{\sqrt{a}}{a} \right) + \log_{ab} \sqrt{b} \right] = (\log_{ab} a + \log_{ab} b)(\log_{ab} a - \log_{ab} b)$$

con $a < 0; b < 0 \wedge ab \neq 1 \wedge a \neq b$.

$$\rightarrow \log_{ab} \left(\log_{ab} \left(\frac{\sqrt{a}}{a} \right)^{-1} + \log_{ab} \sqrt{b} \right) = \log_{ab} ab (\log_{ab} a - \log_{ab} b)$$

$$\rightarrow \log_{ab} (\log_{ab} \sqrt{a} + \log_{ab} \sqrt{b}) = 1 \cdot \log_{ab} \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$\rightarrow \log_{ab} (\log_{ab} \sqrt{ab}) = \log_{ab} \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$\rightarrow \log_{ab} \sqrt{ab} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log_{ab} ab = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA N.º 30

Dé el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I. $\log_{(x-3)} 2 + \log_2 (x-3) \geq 2; \quad \forall x \in \langle 3; 4 \rangle$

II. $\log_{\log_4 3} 6 < 0$

III. $\log_3 5 < \log_4 5$

A) FVF

B) FVV

C) VVV

D) VFF

E) VFV

Resolución

I. Falsa

$$\text{Si } x=3,5 \text{ entonces } \underbrace{\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_2 \frac{1}{2}}_{-1 + -1} \geq 2$$

-1 + -1 ≥ 2 ¡Absurdo!

II. Verdadera

$\log_{(\log_4 3)} 6 < 0$ es correcto, pues la base

$$b = \log_4 3: 0 < b < 1$$

Luego,

$$\begin{aligned} \log_{(\log_4 3)} 6 < 0 &\Leftrightarrow 6 > (\log_4 3)^0 \\ &\Leftrightarrow 6 > 1: \text{obvio} \end{aligned}$$

III. Verdadera

$$\begin{aligned} \log_3 5 > \log_4 5 > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 3} > \log_4 5 \\ &\Leftrightarrow 1 > \log_4 5 \cdot \log_5 3 \\ &\Leftrightarrow 1 > \log_4 3 \\ &\Leftrightarrow \log_4 4 > \log_4 3 \\ &\Leftrightarrow 4 > 3: \text{obvio} \end{aligned}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 31

Indique cuántas soluciones reales posee ecuación

$$\log|x| + x^2 + 4 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)}$$

A) 2

B) 4

C) 6

D) 0

E) 1

Resolución

Escribimos la ecuación así

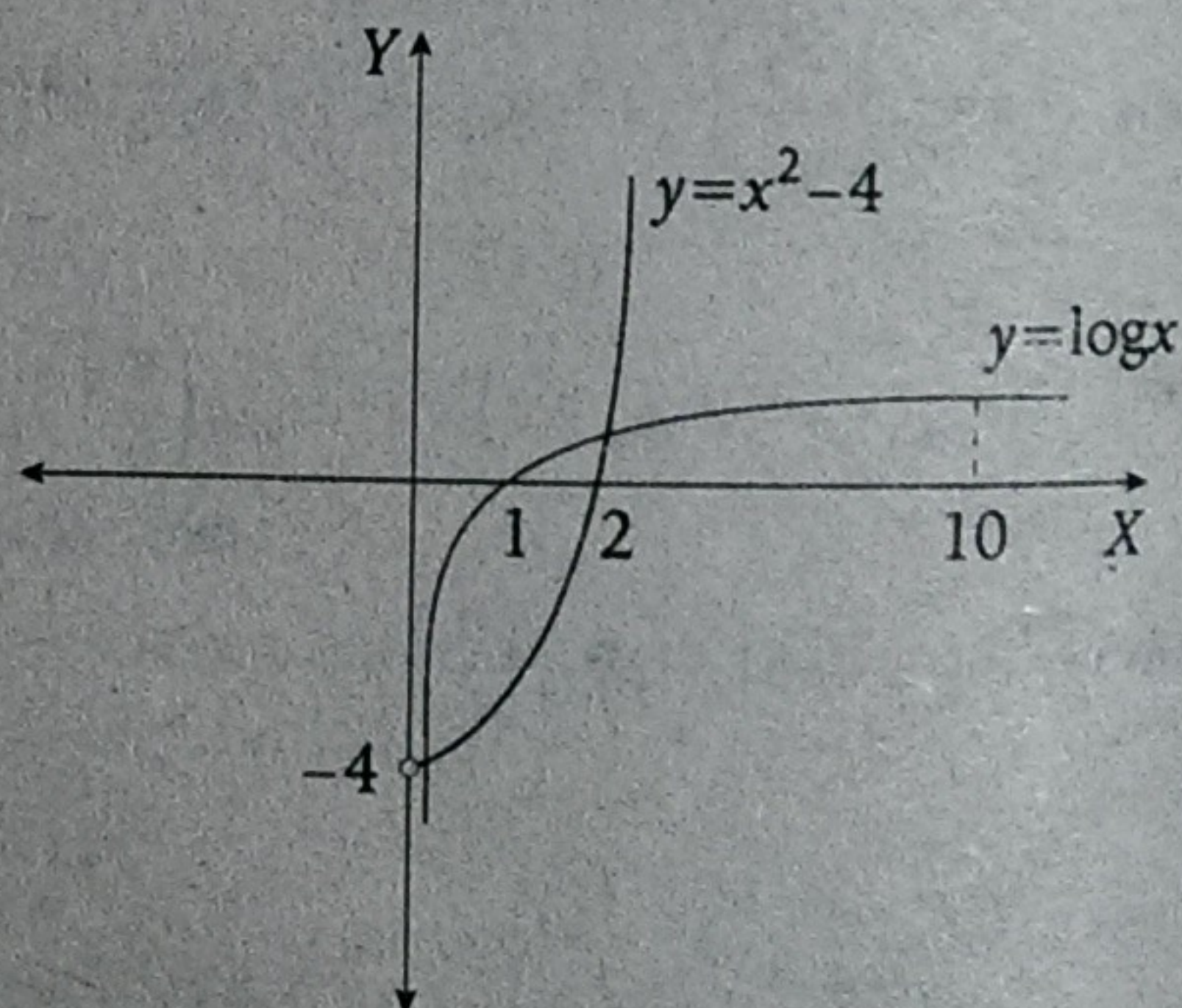
$$\log|x| + x^2 + 4 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)^2}; \quad x > 0$$

$$\rightarrow \log x + x^2 + 4 = (\sqrt{2}x)^2; \quad x > 0$$

$$\rightarrow \log x = -x^2 + 2x^2 - 4; \quad x > 0$$

$$\rightarrow \log x = x^2 - 4; \quad x > 0$$

Gráficamente



Como las gráficas se cortan en dos puntos, entonces hay dos soluciones reales.

Clave **A**

PROBLEMA N.º 32

¿Para qué valor de a la ecuación logarítmica

$$\log(x^2 + 2ax) - \log(8x - 6a - 3) = 0$$

ofrecerá solución real única?

- A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución

Escribimos la ecuación logarítmica así

$$\log(x^2 + 2ax) = \log(8x - 6a - 3)$$

$$\text{con } x^2 + 2ax < 0 \wedge 8x - 6a - 3 < 0 \quad (I)$$

$$\rightarrow x^2 + 2ax = 8x - 6a - 3; x \in \mathbb{R} \text{ es único}$$

$$\rightarrow x^2 + (2a - 8)x + 6a + 3 = 0 \quad (II)$$

Como x es único: $\Delta = 0$.

$$\text{Es decir } \Delta = (2a - 8)^2 - 4(6a + 3) = 0$$

$$\rightarrow \cancel{A}(a - 4)^2 - \cancel{A}(6a + 3) = 0$$

$$\rightarrow (a^2 - 8a + 16) - (6a + 3) = 0$$

$$\rightarrow a^2 - 14a + 13 = 0$$

$$\rightarrow (a - 1)(a - 13) = 0$$

$$\rightarrow a = 1 \vee a = 13$$

Si $a = 1$ entonces en (II)

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = 3$$

Note que $a = 1; x = 3$ verifican (I)

Si $a = 13$ entonces en (II)

$$x^2 + 18x + 81 = 0$$

$$\rightarrow x = -9$$

Note que $a = 13; x = -9$ no verifican (I)

$$\therefore a = 1$$

PROBLEMA N.º 33

Sea $(x_0; y_0)$ una solución del sistema

$$\begin{cases} \log\left(\frac{y^2 + 6}{x^2 + 1}\right) = 2\log\sqrt{\frac{y}{x-1}} \\ \log\left(\frac{x^2 + 6}{y^2 + 1}\right) = 2\log\sqrt{\frac{x}{y-1}} \end{cases}$$

Calcule el valor de $x_0 + y_0$.

- A) 8 B) 7 C) 10
D) 12 E) 5

Resolución

Escribimos el sistema equivalente así

$$\begin{cases} \log\left(\frac{y^2 + 6}{x^2 + 1}\right) = \log\sqrt[2]{\frac{y}{x-1}}^2; \frac{y}{x-1} > 0 & (I) \\ \log\left(\frac{x^2 + 6}{y^2 + 1}\right) = \log\sqrt[2]{\frac{x}{y-1}}^2; \frac{x}{y-1} > 0 & (II) \end{cases}$$

De (I)

$$\frac{y^2 + 6}{x^2 + 1} = \frac{y}{x-1}$$

$$\rightarrow xy^2 + 6x - y^2 - 6 = x^2y + y$$

$$\rightarrow xy^2 + 6x - y^2 - 6 - x^2y - y = 0 \quad (III)$$

De (II)

$$\frac{x^2 + 6}{y^2 + 1} = \frac{x}{y-1}$$

$$\rightarrow x^2y + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x$$

$$\rightarrow x^2y + 6y - x^2 - 6 - xy^2 - x = 0 \quad (IV)$$

Restamos: EC. (III) - EC. (IV)

$$\begin{aligned} 2xy^2 - 2x^2y + 6(x-y) - y^2 + x^2 - y + x &= 0 \\ \rightarrow 2xy(y-x) - 6(y-x) - (y^2 - x^2) - (y-x) &= 0 \\ \rightarrow [2xy - 6 - (y+x) - 1](y-x) &= 0 \\ \rightarrow 2xy - x - y - 7 = 0 \vee y - x = 0 \end{aligned}$$

Note que una solución de la ecuación

$$\begin{aligned} 2xy - x - y - 7 &= 0 \\ \text{es } (x_0; y_0) &= (2; 3): 2(2)(3) - 2 - 3 - 7 = 0 \text{ (verifica)} \\ \therefore x_0 + y_0 &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 34

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Considere $a; b; M \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

- I. $a^{\log_b M + \log_b a} = M$
- II. $a^{\log_b M \cdot \log_b a} = M^{\log_b^2 a}$
- III. $\log_a \log_a x = \log_a \log_b x - \log_a \log_b a$

- A) VVF B) VFF C) VVV
D) FVF E) VFV

Resolución

Consideramos $\{a; b; M\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$, concluimos

I. Verdadera

Como $\log_b M + \log_b a = \log_a M$ entonces

$$a^{(\log_b M + \log_b a)} = a^{\log_a M} = M$$

I. Verdadera

$$\begin{aligned} a^{\log_b M \cdot \log_b a} &= (a^{\log_b M})^{\log_b a} = (M^{\log_b a})^{\log_b a} \\ &= M^{(\log_b a)^2} \end{aligned}$$

III. Verdadera

$$\begin{aligned} \text{Como } \log_a \log_b x - \log_a \log_b a &= \log_a \frac{\log_b x}{\log_b a} \\ &= \log_a (\log_a x) \end{aligned}$$

$$\therefore \log_a (\log_a x) = \log_a \log_b x - \log_a \log_b a$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 35

Calcule el producto de soluciones de la ecuación

$$6 + 5\log_2 z = \frac{1}{\log_z^2 2}$$

- A) 4 B) 16 C) 32
D) 8 E) 64

Resolución

Escribimos la ecuación logarítmica así

$$6 + 5\log_2 z = \left(\frac{1}{\log_z 2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow z > 0 \wedge z \neq 1 \wedge 6 + 5\log_2 z &= (\log_2 z)^2 \\ \rightarrow (\log_2 z)^2 - 5\log_2 z - 6 &= 0 \\ \rightarrow (\log_2 z - 6)(\log_2 z + 1) &= 0 \\ \rightarrow \log_2 z - 6 = 0 \vee \log_2 z + 1 &= 0 \\ \rightarrow \log_2 z = 6 \vee \log_2 z = -1 \\ \rightarrow z_1 = 2^6; z_2 = 2^{-1} \end{aligned}$$

Note que z_1 y z_2 son positivos distintos de 1.

$$\therefore z_1 z_2 = 2^6 \cdot 2^{-1} = 2^5 = 32$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 36

Si $a, b, c \in \langle 1; +\infty \rangle$, halle el mínimo valor de $\frac{\log_a b^c c^b + \log_b a^c c^a + \log_c a^b b^a}{\sqrt[3]{abc}}$.

- A) 2 B) 6 C) 10
D) 14 E) 18

Resolución

Como $\{a, b, c\} \subset \langle 1; +\infty \rangle$ entonces

$$\{\log_a b; \log_b a; \log_c a; \log_a c; \log_c b; \log_b c\} \subset \mathbb{R}^+$$

$$\text{Luego, } \log_a b + \log_b a \geq 2$$

$$\rightarrow c \cdot \log_a b + c \log_b a \geq 2c$$

$$\rightarrow \log_a b^c + \log_b a^c \geq 2c$$

Análogamente

$$\log_c a^b + \log_a c^b \geq 2b$$

$$\log_c b^a + \log_b c^a \geq 2a$$

(+)

Sumamos

$$\log_a b^c + \log_a c^b + \log_b a^c + \log_b c^a + \log_c a^b + \log_c b^a \geq 2(a+b+c)$$

$$\rightarrow \log_a b^c c^b + \log_b a^c c^a + \log_c a^b b^a \geq 2(a+b+c)$$

También

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \rightarrow 2(a+b+c) \geq 6\sqrt[3]{abc}$$

Luego

$$\log_a b^c c^b + \log_b a^c c^a + \log_c a^b b^a \geq 2(a+b+c) \geq 6\sqrt[3]{abc}$$

$$\rightarrow \log_a b^c c^b + \log_b a^c c^a + \log_c a^b b^a \geq 6\sqrt[3]{abc}$$

$$\rightarrow \frac{\log_a b^c c^b + \log_b a^c c^a + \log_c a^b b^a}{\sqrt[3]{abc}} \geq 6$$

Por lo tanto, el menor valor de la expresión es 6.

Clave **B**

PROBLEMA N.º 37

Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes

- I. $\log_2 x < \log_3 x; \forall x > 1$
II. $f(x) = e^{-x} - x = 0$ tiene una solución en $\langle 0; 1 \rangle$
III. Si $\log a^n = \log^n a \rightarrow a = 10^{n-\sqrt[n]{n}}; a > 0; n \geq 3$.

- A) FVF B) FFF C) VVV
D) FVV E) VVF

Resolución

I. Falsa

$$\forall x > 1: \log_2 x < \log_3 x \Leftrightarrow \log_2 x < \frac{1}{\log_x 3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_x 3 < 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 3 < \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow 3 < 2 \text{ ¡Absurdo!}$$

II. Verdadera

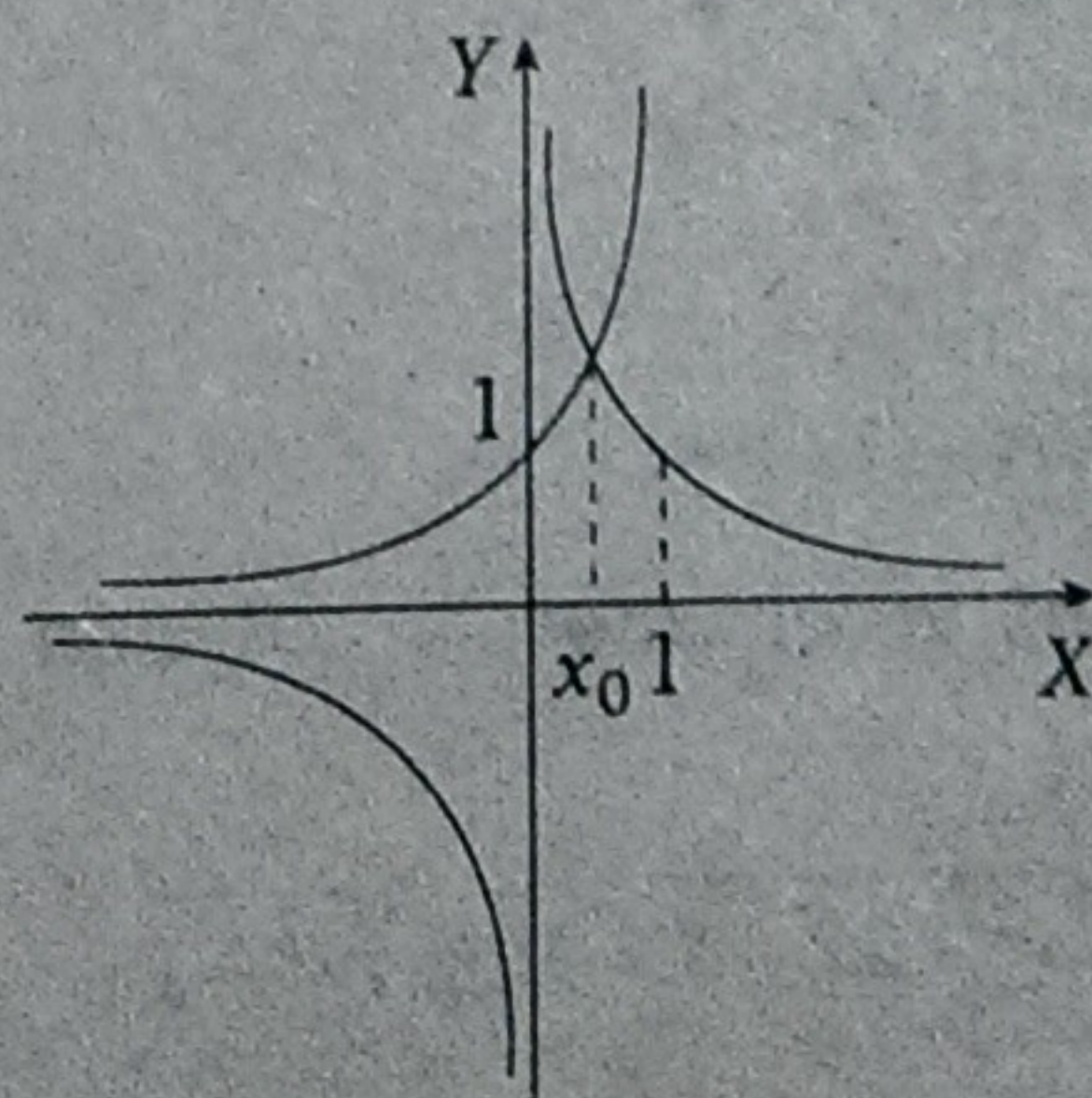
$$e^{-x} - x = 0$$

$$\rightarrow e^{-x} = x$$

$$\rightarrow e^x = x^{-1}$$

$$\rightarrow e^x = \frac{1}{x}$$

Gráficamente



Note que existe $x_0 \in \langle 0; 1 \rangle$ tal que $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$

III. Verdadera

Como $a < 0 \wedge n \geq 3$ entonces

$$\log a^n = (\log a)^n \rightarrow n \cdot \log a = (\log a)^n$$

$$\rightarrow n = (\log a)^{n-1}$$

$$\rightarrow n^{\frac{1}{n-1}} = \log a$$

$$\therefore a = 10^{n^{\frac{1}{n-1}}}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 38

Calcule el valor de x que verifica la ecuación

$$\frac{\log \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\log \sqrt[3]{x^3 - 1}} = \frac{3}{2}$$

- A) $-\sqrt{2}$
- B) $\sqrt{2}$
- C) $\sqrt{3}$
- D) $-\sqrt{3}$
- E) 2

Resolución

Primero hallamos el CVA

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \wedge x^3 - 1 > 0$$

$$\rightarrow (x+3)(x-1) < 0 \wedge x^3 > 1$$

$$\rightarrow \underbrace{(x+3)(x-1)}_{(+)} < 0 \wedge x > 1$$

$$\rightarrow x - 1 > 0 \wedge x > 1$$

$$\rightarrow (x > 1 \wedge x > 1)$$

$$\rightarrow x > 1$$

Luego, CVA = $\langle 1; +\infty \rangle$

Finalmente, resolvemos la ecuación logarítmica así

$$2 \log \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 3 \log \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

$$\rightarrow \log \sqrt{x^2 + 2x - 3}^{\cancel{2}} = \log \sqrt[3]{x^3 - 1}^{\cancel{3}}$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 3 = x^3 - 1$$

$$\rightarrow 0 = x^3 - x^2 - 2x + 2$$

$$\rightarrow 0 = x^2(x-1) - 2(x-1)$$

$$\rightarrow 0 = (x^2 - 2)(x-1) \wedge \underbrace{x > 1}_{(+)}$$

$$\rightarrow x^2 - 2 = 0 \wedge x > 1$$

$$\rightarrow (x^2 = 2 \wedge x > 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 39

Calcule la derivada de la función

$y = \log_2 x \ln 2x$, en el punto de abscisa $x = 1$.

- A) 2
- B) 3
- C) -1
- D) 1
- E) 0

Resolución

Como $y = f(x) = \log_2 x \cdot \ln 2x$

$$\rightarrow y' = f'(x) = (\log_2 x)' \ln 2x + (\ln 2x)' \log_2 x$$

$$\rightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln 2} \right)' \ln 2x + \frac{2}{x} \cdot \log_2 x$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln 2x + \frac{2}{x} \cdot \log_2 x$$

$$\rightarrow f'_{(1)} = \frac{1}{\ln 2} \cdot 1 \cdot \ln 2 + 2 \cdot (\log_2 1)$$

$$\rightarrow f'_{(1)} = 1 + 2(0) = 1$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 40

Si se sabe que

$$\frac{2}{\log_n m} + \frac{3}{\log_q p} = \frac{6}{\log_s r}$$

y $2^{\log_n m^3} = 3^{\log_q p^2} = x^{\log_s r}$, con

$m, n, p, q, r, s \in \langle 1; +\infty \rangle$, determine el valor de x .

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Sean $2^{\log_n m^3} = 3^{\log_q p^2} = x^{\log_s r} = t$

$$\rightarrow \begin{cases} \log_n m^3 = \log_2 t \rightarrow 3 \log_n m = \log_2 t \\ \rightarrow \log_n m = \frac{1}{3} \log_2 t \\ \log_q p^2 = \log_3 t \rightarrow 2 \log_q p = \log_3 t \\ \rightarrow \log_q p = \frac{1}{2} \log_3 t \\ \log_s r = \log_x t \end{cases}$$

Luego en

$\frac{2}{\log_n m} + \frac{3}{\log_q p} = \frac{6}{\log_s r}$ se tiene

$$\frac{2}{\frac{1}{3} \log_2 t} + \frac{3}{\frac{1}{2} \log_3 t} = \frac{6}{\log_x t}$$

$\rightarrow \cancel{6} \cdot \log_t 2 + \cancel{6} \cdot \log_t 3 = \cancel{6} \cdot \log_t x$

$\rightarrow \log_t 2 + \log_t 3 = \log_t x$

$\rightarrow \log_t 6 = \log_t x$

$\therefore x = 6$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 41

A partir de la ecuación

$$\ln x^2 + x^2 + 9 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)}$$

indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones

- I. La suma de soluciones es cero.
II. La mayor solución es mayor a 3.
III. Tiene una solución x_0 tal que $x_0 \in \langle 0; 1 \rangle$.

- A) VVV B) VFF C) VVF
D) FVV E) FVF

Resolución

Analicemos la ecuación gráficamente

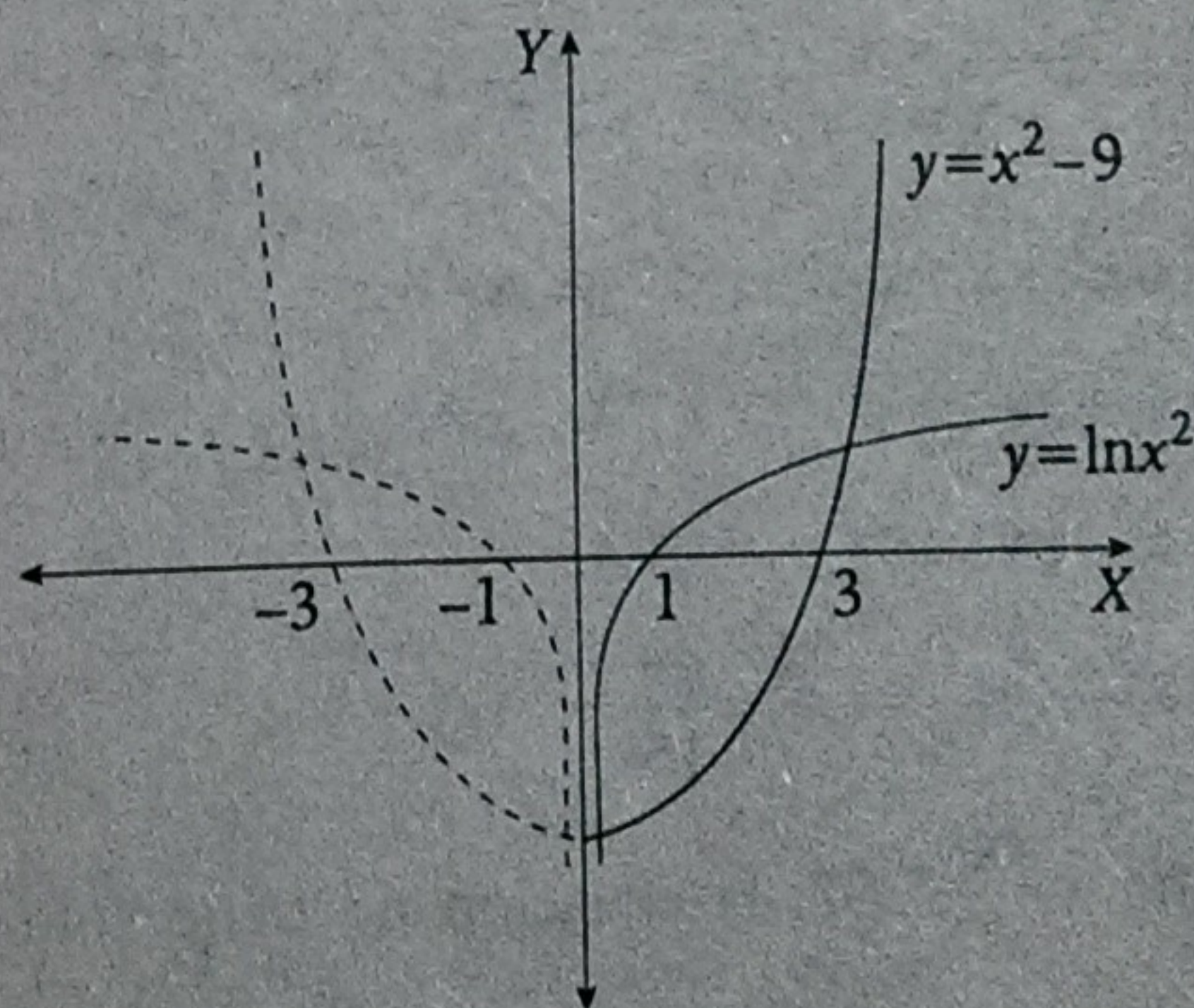
$$\ln x^2 + x^2 + 9 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)} ; \underline{x < 0}$$

$\rightarrow \ln x^2 + x^2 - 9 = 4^{\log_4(\sqrt{2}x)^2}$

$\rightarrow \ln x^2 + x^2 - 9 = 2x^2$

$\rightarrow \ln x^2 = x^2 - 9 ; \underline{x < 0}$

Gráficamente



Note que solo hay 2 puntos de corte: x_0 y x_1 , con $x_0 \in \langle 0; 1 \rangle$ y $x_1 \in \langle 3; +\infty \rangle$. Es decir, ambas soluciones son positivas, entonces

I. Falsa

Pues la suma de las soluciones es positiva.

II. Verdadera

Pues la mayor solución x_1 es mayor a 3.

III. Verdadera

Pues la solución x_0 está en $\langle 0; 1 \rangle$.

Clave **D**

PROBLEMA N.º 42

Luego de resolver la ecuación

$$\log_{\sqrt{x-7}} \sqrt{x^2+x} = 2,$$

halle el número de soluciones.

- A) 1 B) 2 C) 0
D) 3 E) 4

Resolución

Resolvemos la ecuación logarítmica así

$$\log_{\sqrt{x-7}} \sqrt{x^2+x} = 2; x < 7 \wedge x \neq 8$$

Note que $\forall x < 7: \sqrt{x^2+x} > 0$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x-7}^2; x < 7 \wedge x \neq 8$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+x} = x-7; x < 7 \wedge x \neq 8$$

$$\rightarrow x^2+x = (x-7)^2; x < 7 \wedge x \neq 8$$

$$\rightarrow x^2+x = x^2-14x+49$$

$$\rightarrow 15x=49 \rightarrow x=\frac{49}{15}$$

Como $x=\frac{49}{15} \not< 7$, la ecuación no tiene solución.

$$\therefore CS=\emptyset$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 43

Resuelva la ecuación $(0,1)^{\log x} = 10^{\log^2 x}$ e indique el producto de soluciones.

- A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\log x} = 10^{(\log x)^2}; x < 0$$

$$\rightarrow 10^{-\log x} = 10^{(\log x)^2}; x < 0$$

$$\rightarrow (\log x)^2 = -\log x; x < 0$$

$$\rightarrow (\log x)^2 + \log x = 0; x < 0$$

$$\rightarrow \log x(\log x + 1) = 0; x < 0$$

$$\rightarrow \log x = 0 \vee \log x + 1 = 0; x < 0$$

$$\rightarrow x = 10^0 \vee \log x = -1$$

$$\rightarrow x_1 = 1 < 0; x_2 = 10^{-1} < 0$$

$$\therefore x_1 x_2 = 10^{-1} = 0,1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 44

Resuelva la siguiente ecuación

$$\log_x (5-x) + \frac{1}{\log_{(x+2)} x} = \log_x 6$$

y calcule el valor de $\log_{64} x^2$.

- A) 0 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

Resolución

Escribimos la ecuación así

$$\log_x(5-x) + \log_x(x+2) = \log_x 6$$

Hallamos el CVA

$$x < 0 \wedge x \neq 1 \wedge 5-x < 0$$

$$\rightarrow 0 < x < 5 \wedge x \neq 1$$

Resolvemos la ecuación

$$\rightarrow \log_x(5-x)(x+2) = \log_x 6$$

$$\rightarrow (5-x)(x+2) = 6$$

$$\rightarrow (x-5)(x+2) = -6$$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 10 = -6$$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

$$\rightarrow x-4=0 \vee x+1=0$$

$$\rightarrow x=4; x=-1$$

$$\text{Como } 0 < x < 5 \wedge x \neq 1$$

$$\rightarrow x=4$$

$$\therefore \log_{64} x^2 = \log_{4^3} 4^2 = \frac{2}{3}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 45

Dado el siguiente sistema

$$\begin{cases} \log_{\sqrt[3]{y}} \sqrt[3]{x^3} - \log_x y^6 = 3; \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1, \end{cases}$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = 1,$$

determine el mayor valor de xy .

A) 100

B) 1

C) 1000

D) 10

E) 1/10

Resolución

Equivalentemente escribimos el sistema

$$\begin{cases} \log_{\sqrt[3]{y}} \sqrt[3]{x^3} - 6 \log_x y = 3 & \text{(I)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

con $x; y$ positivos y distintos de 1.

De la ecuación (II)

$$\frac{x}{y} = 10 \rightarrow x = 10y$$

De la ecuación (I)

$$3 \log_y x - 6 \log_x y - 3 = 0$$

$$\rightarrow \log_y x - 2 \log_x y - 1 = 0$$

Multiplicamos por $\log_y x$

$$\rightarrow (\log_y x)^2 - \log_y x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (\log_y x - 2)(\log_y x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \log_y x - 2 = 0 \vee \log_y x + 1 = 0$$

$$\rightarrow \log_y x = 2 \vee \log_y x = -1$$

$$\rightarrow x = y^2 \vee x = y^{-1}$$

Como $x = 10y$:

$$10y = y^2 \vee 10y = \frac{1}{y}; y < 0$$

$$\rightarrow y = 10 \vee y^2 = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 10 \wedge x = 100 \rightarrow xy = 1000 : \text{máximo} \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} \wedge x = \frac{10}{\sqrt{10}} \rightarrow xy = 1 \end{cases}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 46

Si $x = 10,999...$ aproxime el valor de

$$f_{(x)} = \frac{x^2 \log \llbracket x \rrbracket - 100}{x - 10}$$

- A) 0
- B) 11
- C) 20
- D) 21
- E) 1

Resolución

Como $x = 10,999$

$$\rightarrow \llbracket x \rrbracket = 10 \wedge x \approx 11$$

$$\text{Luego } f_{(x)} \approx \frac{11^2 \cdot \log 10 - 100}{11 - 10}$$

$$\rightarrow f_{(x)} \approx \frac{121 \cdot (1) - 100}{1} = 21$$

$$\therefore f_{(x)} = 21$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 47

Halle el campo de definición de f si

$$f_{(x)} = \frac{1 + \log_2 (x - 4)}{\log_3 (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 5})}$$

- A) $[5; +\infty)$
- B) $[5; +\infty) - \left\{ \frac{69}{4} \right\}$
- C) \mathbb{R}
- D) \emptyset
- E) solo $\{x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 5\}$

Resolución

Tenemos

$$f_{(x)} = \frac{1 + \log_2 (x - 4)}{\log_3 (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 5})} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & \text{si } x - 4 > 0 \wedge x - 5 \geq 0 \wedge \sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 5} > 0 \\ & \wedge \sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 5} \neq 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underbrace{x > 4 \wedge x \geq 5}_{x \geq 5} \wedge \sqrt{x + 3} > \sqrt{x - 5} \wedge \sqrt{x + 3} \neq 1 + \sqrt{x - 5}$$

$$\rightarrow x \geq 5 \wedge x + 3 > x - 5 \wedge \sim [\sqrt{x + 3} = 1 + \sqrt{x - 5}]$$

$$\rightarrow x \geq 5 \wedge 3 > -5 \wedge \sim [x + 3 = 1 + 2\sqrt{x - 5} + x - 5]$$

$$\rightarrow \underbrace{x \geq 5 \wedge x \in \mathbb{R}}_{x \geq 5} \wedge \sim [7 = 2\sqrt{x - 5}]$$

$$\rightarrow x \geq 5 \wedge \sim [49 = 4(x - 5)]$$

$$\rightarrow x \geq 5 \wedge \sim [4x - 20 = 49]$$

$$\rightarrow x \geq 5 \wedge \sim [4x = 69]$$

$$\rightarrow x \geq 5 \wedge x \neq \frac{69}{4}$$

$$\therefore CS = [5; +\infty) - \left\{ \frac{69}{4} \right\}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 48

Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases} x^{\ln y} = e^{-3}; \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 10 \end{cases}$$

se obtiene el siguiente conjunto solución

$$CS = \{(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_k; y_k)\}$$

$$\text{Calcule } \prod_{i=1}^k (\ln e^{x_i} \cdot \ln e^{y_i}).$$

- A) 3
- B) 3^2
- C) 3^3
- D) 0
- E) 1

Resolución

Equivalentemente escribimos el sistema así

$$\begin{cases} \ln y \cdot \ln x = \ln e^{-3} = -3 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 10 \end{cases}$$

$$\text{De } (\ln x + \ln y)^2 = \ln^2 x + \ln^2 y + 2 \ln x \ln y$$

$$\rightarrow (\ln x + \ln y)^2 = 10 + 2(-3)$$

$$\rightarrow (\ln x + \ln y)^2 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} \ln x + \ln y = 2 \wedge \ln x \ln y = -3 & \text{(I)} \\ \ln x + \ln y = -2 \wedge \ln x \ln y = -3 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \ln x + \ln y = 2 \wedge \ln x \ln y = -3 & \text{(I)} \\ \ln x + \ln y = -2 \wedge \ln x \ln y = -3 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I)

$$\begin{cases} \ln x = 3 \wedge \ln y = -1 \\ \ln x = -1 \wedge \ln y = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = e^3 \wedge y = e^{-1} \rightarrow (x_1; y_1) = (e^3; e^{-1}) \\ x = e^{-1} \wedge y = e^3 \rightarrow (x_2; y_2) = (e^{-1}; e^3) \end{cases}$$

De (II)

$$\begin{cases} \ln x = -3 \wedge \ln y = 1 \\ \ln x = 1 \wedge \ln y = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = e^{-3} \wedge y = e \rightarrow (x_3; y_3) = (e^{-3}; e) \\ x = e \wedge y = e^{-3} \rightarrow (x_4; y_4) = (e; e^{-3}) \end{cases}$$

Debemos calcular

$$\prod_{i=1}^4 (\ln e^{x_i} \cdot \ln e^{y_i}) = \prod_{i=1}^4 (x_i \cdot y_i)$$

$$= (x_1 y_1) (x_2 y_2) (x_3 y_3) (x_4 y_4)$$

$$= (e^3 \cdot e^{-1}) (e^{-1} \cdot e^3) (e^{-3} \cdot e) (e \cdot e^{-3}) = e^0$$

$$\therefore \prod_{i=1}^4 (\ln e^{x_i} \cdot \ln e^{y_i}) = 1$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 49

El número $2^8 + 2^{11} + 2^x$ es un cuadrado perfecto y $x < 15$.

Calcule el valor de $\log\left(\frac{x^2 - 44}{x - 2}\right)$.

- A) 5 B) 10 C) 2
D) 1 E) 0

Resolución

Sea $N = 2^8 + 2^{11} + 2^x$ un cuadrado perfecto de la forma $N = (2^a + 2^b)^2$

$$\rightarrow N = 2^{2a} + 2^{2a+2b} + 2^{2b}$$

$$\rightarrow N = 2^{2a} + 2^{a+b+1} + 2^{2b} = 2^8 + 2^{11} + 2^x$$

$$\text{Luego, } 2a = 8 \wedge a + b + 1 = 11 \wedge 2b = x$$

$$\rightarrow a = 4 \wedge b = 6 \wedge x = 2(6)$$

$$\rightarrow x = 12$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 44}{x - 2} = \frac{12^2 - 44}{12 - 2} = \frac{100}{10} = 10$$

$$\therefore \log\left(\frac{x^2 - 44}{x - 2}\right) = \log 10 = 1$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 50

Resuelva la siguiente inecuación

$$2^{b^x} < 1; b < 0 \wedge b \neq 1$$

e indique su conjunto solución.

- A) \emptyset B) $\{1\}$ C) \mathbb{R}
D) 1 E) $\{0\}$

Resolución

Resolvemos la inecuación así

$$2^{b^x} < 1; \underline{b < 0} \wedge \underline{b \neq 1}$$

$$\rightarrow 2^{b^x} < 2^0$$

$$\rightarrow b^x < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore CS = \mathbb{R}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 51

Sea el sistema logarítmico

$$\begin{cases} \log_b x + \log_a y \leq \log_b a^n + \frac{1}{1+c}; \\ (\log_a b)(\log_a x) + (\log_b a)(\log_b y) \leq \log_a b^n - \frac{1}{1+c}, \end{cases}$$

con $a < 1 \wedge b < 1$.

Si $(x_0; y_0)$ es una solución particular del sistema, calcule el valor de S.

$$S = \text{sgn} \left[\log_a \left(\frac{x_0}{a^{\frac{n}{2}}} \right) + \log_b \left(\frac{y_0}{b^{\frac{n}{2}}} \right) - 1 \right]$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) $\text{sgn } 2$ E) $\text{sgn } 0$

Resolución

Podemos escribir el sistema logarítmico así

$$\begin{cases} \log_b a \cdot \log_a x + \log_a b \cdot \log_b y \leq \log_b a^n + \frac{1}{1+c}; \\ \log_a b \cdot \log_a x + \log_b a \cdot \log_b y \leq \log_a b^n - \frac{1}{1+c} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Sumamos miembro a miembro y factorizamos

$$\log_a x (\log_b a + \log_a b) + \log_b y (\log_a b + \log_b a) \leq n (\log_b a + \log_a b)$$

$$\rightarrow (\log_a x + \log_b y) (\log_b a + \log_a b) \leq n (\log_b a + \log_a b);$$

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

Como $a < 1 \wedge b < 1$, entonces

$$\underbrace{\log_b a}_{(+)} + \underbrace{\log_a b}_{(+)} \geq 2$$

Luego, podemos cancelar este factor.

$$\rightarrow \log_a x + \log_b y \leq n$$

$$\rightarrow \log_a x - \frac{n}{2} + \log_b y - \frac{n}{2} \leq 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\log_a x - \log_a a^{n/2}} + \underbrace{\log_b y - \log_b b^{n/2}} \leq 0$$

$$\rightarrow \log_a \left(\frac{x}{a^{n/2}} \right) + \log_b \left(\frac{y}{b^{n/2}} \right) \leq 0;$$

$(x_0; y_0)$ es solución

$$\rightarrow \log_a \left(\frac{x_0}{a^{n/2}} \right) + \log_b \left(\frac{y_0}{b^{n/2}} \right) - 1 \leq -1$$

$$\rightarrow \left(\log_a \left(\frac{x_0}{a^{n/2}} \right) + \log_b \left(\frac{y_0}{b^{n/2}} \right) - 1 \right) \text{ es negativo}$$

$$\therefore S = \text{sgn} \left[\log_a \left(\frac{x_0}{a^{n/2}} \right) + \log_b \left(\frac{y_0}{b^{n/2}} \right) - 1 \right] = -1$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 52

$$\text{Si } \frac{\log_p n + n}{m^3} = \frac{\log_p m - m}{n^3} = \frac{3}{m^4 + n^4},$$

calcule el valor de M .

$$M = \log_{\sqrt[3]{p}}(n^m m^n) + \log_{n^m \cdot m^n} p^5$$

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{34}{15}$ C) $-\frac{1}{15}$
D) $-\frac{34}{15}$ E) $\frac{32}{3}$

Resolución

Sean

$$\frac{\log_p n + n}{m^3} = \frac{\log_p m - m}{n^3} = \frac{3}{m^4 + n^4} = k$$

$$\log_p n + n = km^3 \quad \wedge \quad \log_p m - m = kn^3$$

$$\wedge \quad k(m^4 + n^4) = 3$$

Entonces

$$m \log_p n + mn = km^4 \quad \wedge \quad n \log_p m - mn = kn^4$$

$$\rightarrow \log_p n^m + mn + \log_p m^n - mn = km^4 + kn^4$$

$$\rightarrow \log_p (n^m \cdot m^n) = k(m^4 + n^4) = 3$$

$$\rightarrow \log_p (n^m \cdot m^n) = 3 \quad \wedge \quad \log_{(n^m \cdot m^n)} p = \frac{1}{3}$$

Luego

$$M = \log_{\sqrt[3]{p}}(n^m \cdot m^n)^3 + \log_{(n^m \cdot m^n)} p^5$$

$$\rightarrow M = 3 \log_p (n^m \cdot m^n) + 5 \log_{n^m \cdot m^n} p$$

$$\rightarrow M = 3(3) + 5\left(\frac{1}{3}\right) = 9 + \frac{5}{3}$$

$$\therefore M = \frac{32}{3}$$

Clave **E**

Logaritmos

PROBLEMA N.º 53

Dado el conjunto $A = \{a; b; c; a+b\}$, si

$$\log_{|m|+2}(a^2+1) + \log_{|n|+3}(b^2-2b+2) + \log_{|p|+4}(a^2+2ac+c^2+1) = 0,$$

halle $n_{(A)}$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Tenemos

$$\log_{|m|+2}(a^2+1) + \log_{|n|+3}(b^2-2b+1+1) + \log_{|p|+4}(a^2+2ac+c^2+1) = 0$$

$$\rightarrow \log_{|m|+2}(a^2+1) + \log_{|n|+3}[(b-1)^2+1] + \log_{|p|+4}[(a+c)^2+1] = 0$$

Nota

- Las bases $|m|+2$; $|n|+3$; $|p|+4$ son mayores que 1.
- Los números a^2+1 ; $(b-1)^2+1$; $(a+c)^2+1$ son mayores o iguales que 1.

Luego ningún logaritmo es negativo y como la suma de estos es cero, entonces cada logaritmo vale cero.

$$\rightarrow \log_{|m|+2}(a^2+1) = 0$$

$$\wedge \log_{|n|+3}[(b-1)^2+1] = 0$$

$$\wedge \log_{|p|+4}[(a+c)^2+1] = 0$$

$$\rightarrow a^2+1=1 \quad \wedge \quad (b-1)^2+1=1$$

$$\wedge (a+c)^2+1=1$$

$$\rightarrow a^2=0 \wedge (b-1)^2=1 \wedge (a+c)^2=1$$

$$\rightarrow a=0 \wedge b-1=0 \wedge a+c=0$$

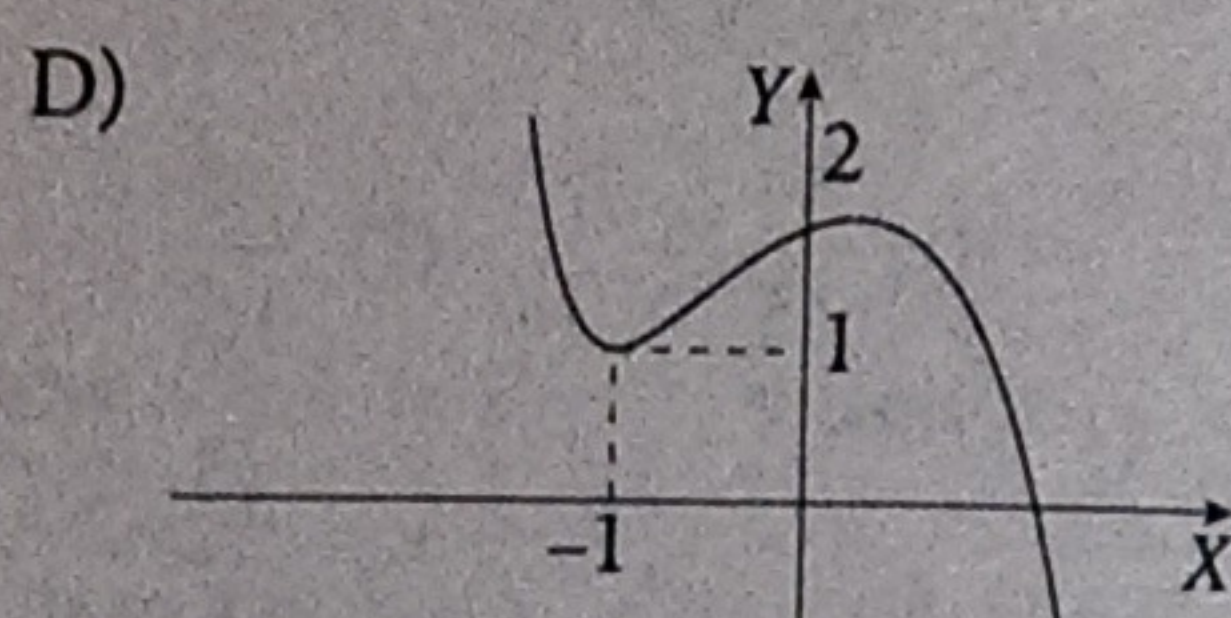
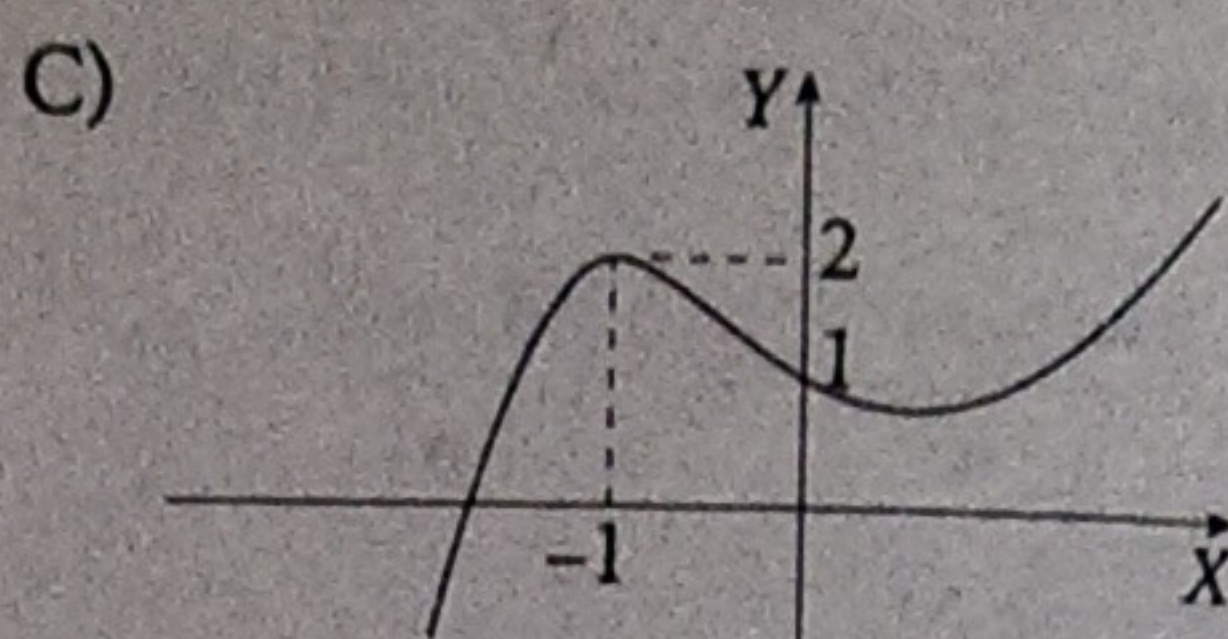
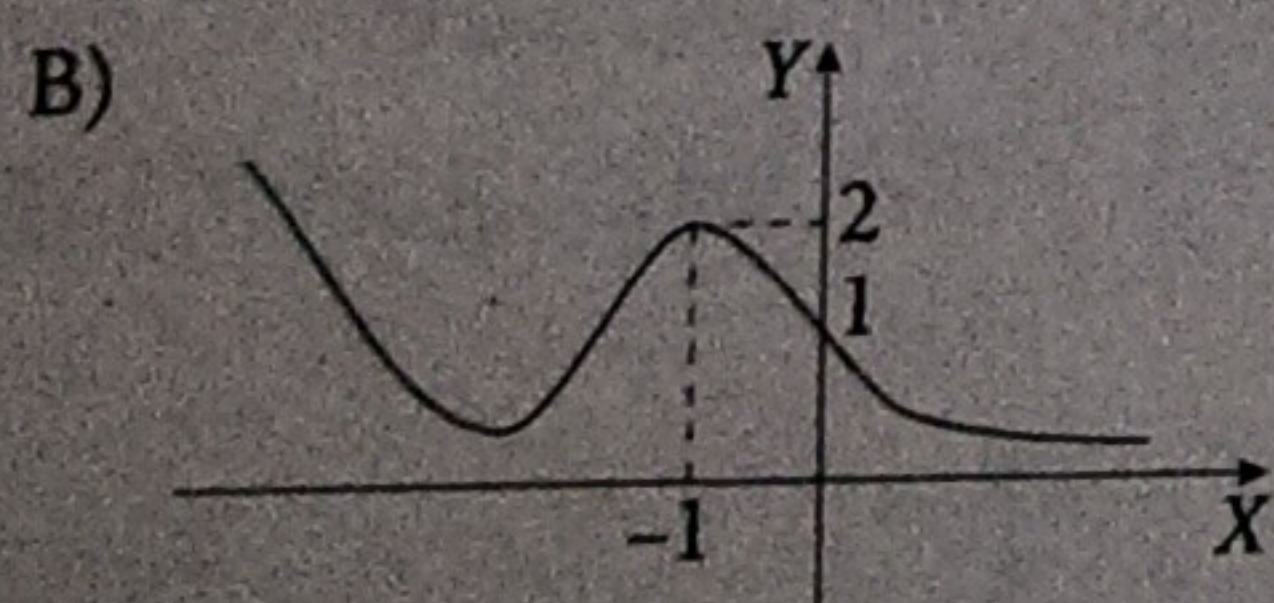
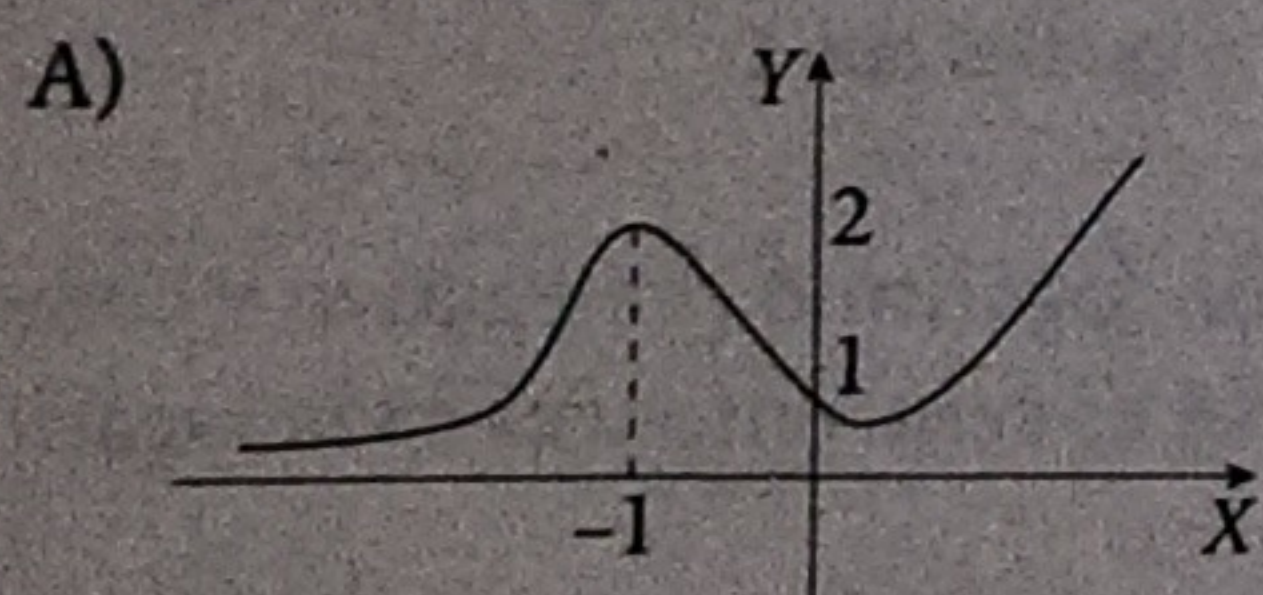
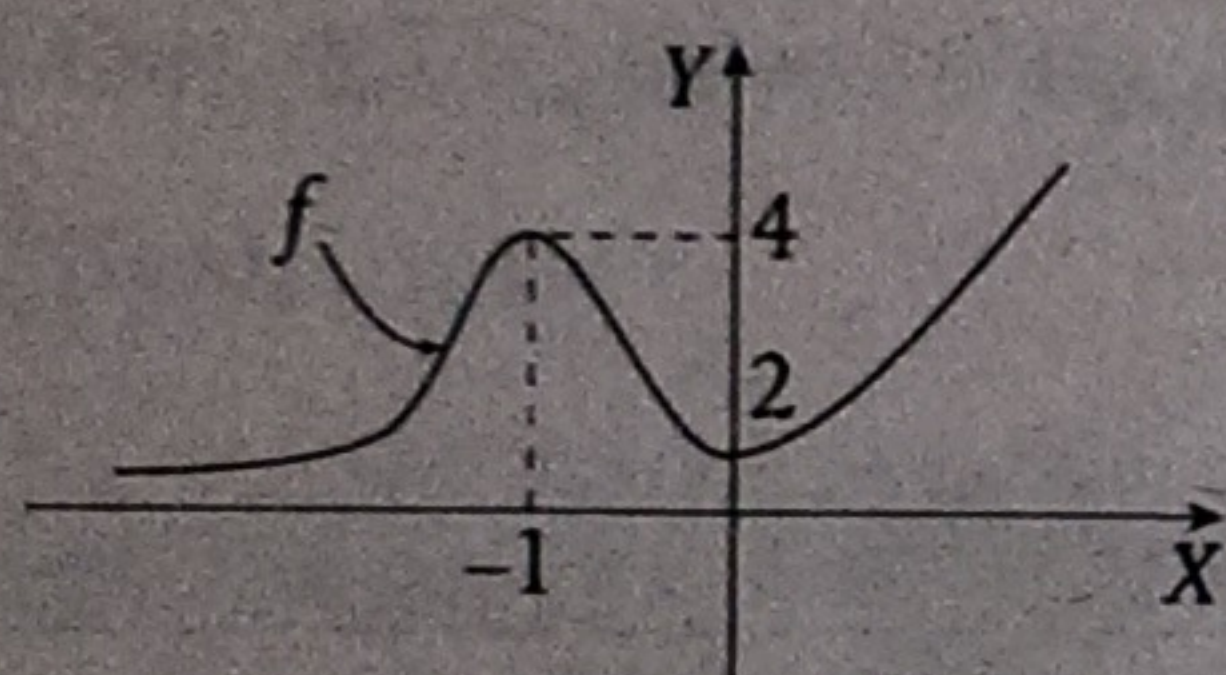
$$\rightarrow a=0 \wedge b=1 \wedge c=-a=0$$

Así el conjunto $A=\{0; 1; 0; 0+1\}=\{0; 1\}$ tiene dos elementos.

Clave **B**

PROBLEMA N.º 54

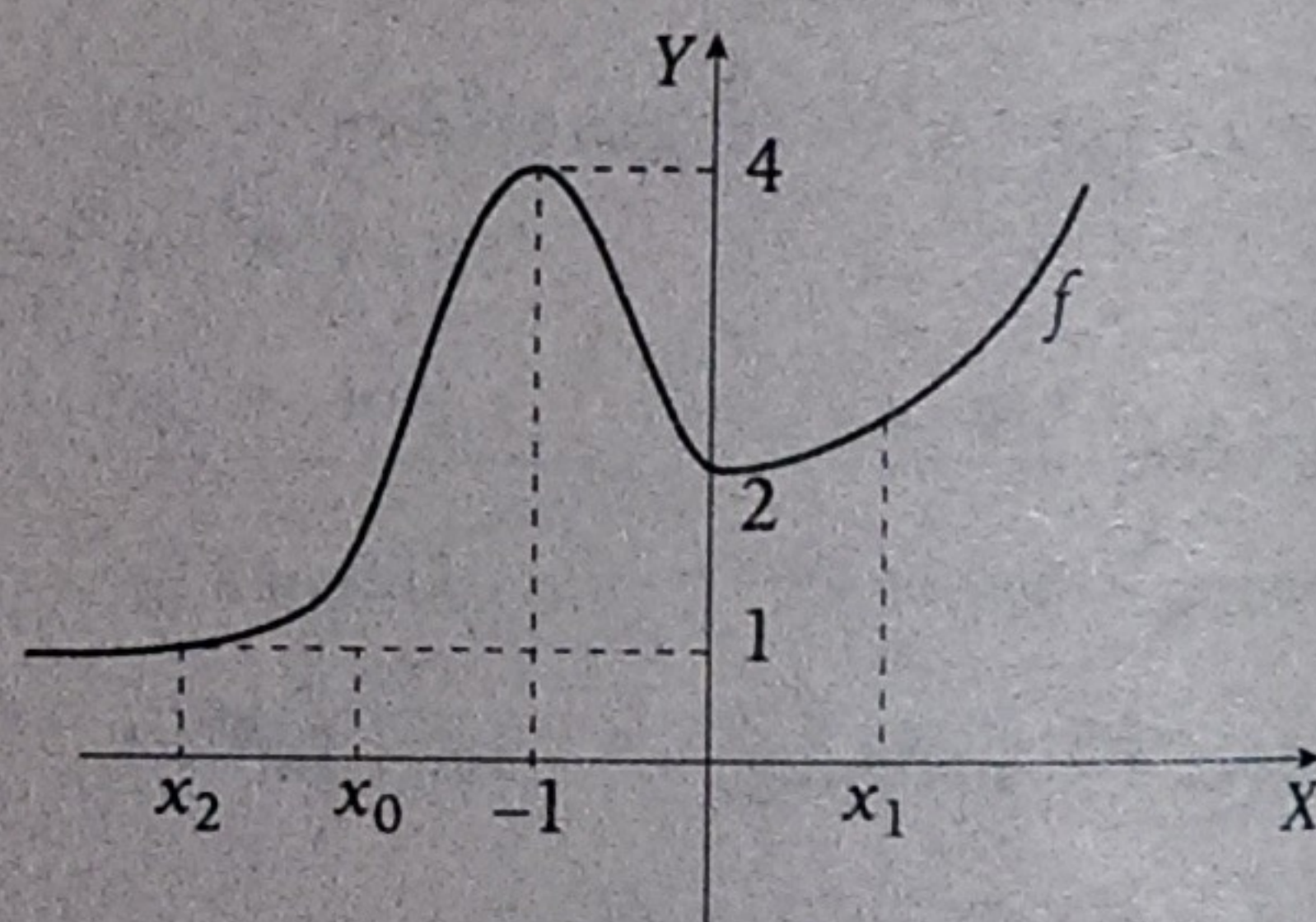
A partir de la gráfica de f mostrada en el plano cartesiano, esboce la gráfica de la función cuya regla de correspondencia es $y=\log_2 f(x)$.



E) No es posible graficarla.

Resolución

Sea la gráfica de f



Note que

$$f(0)=2; f(-1)=4; f(x_0)=1, f(x_1)<2; \\ 0 < f(x_2) < 1$$

Sea $y=h(x)=\log_2 f(x)$

Luego

$$h(0)=\log_2 f(0)=\log_2 2=1$$

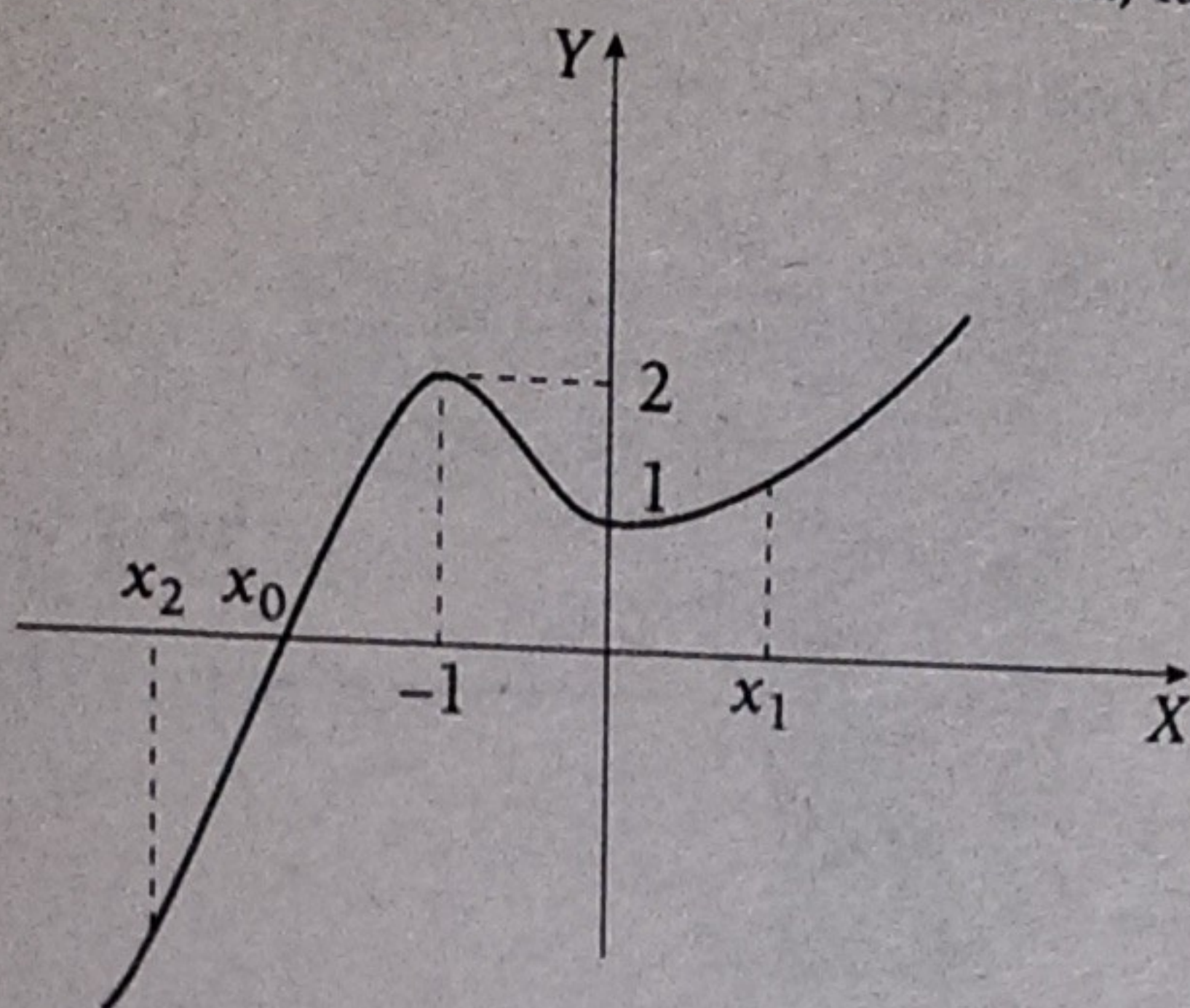
$$h(-1)=\log_2 f(-1)=\log_2 4=2$$

$$h(x_0)=\log_2 f(x_0)=\log_2 1=0$$

$$h(x_1)=\log_2 f(x_1) < \log_2 2=1$$

$$h(x_2)=\log_2 f(x_2) < \log_2 1 < 0$$

Como f es continua y la función logarítmica también es continua, la gráfica de h es



Clave **C**

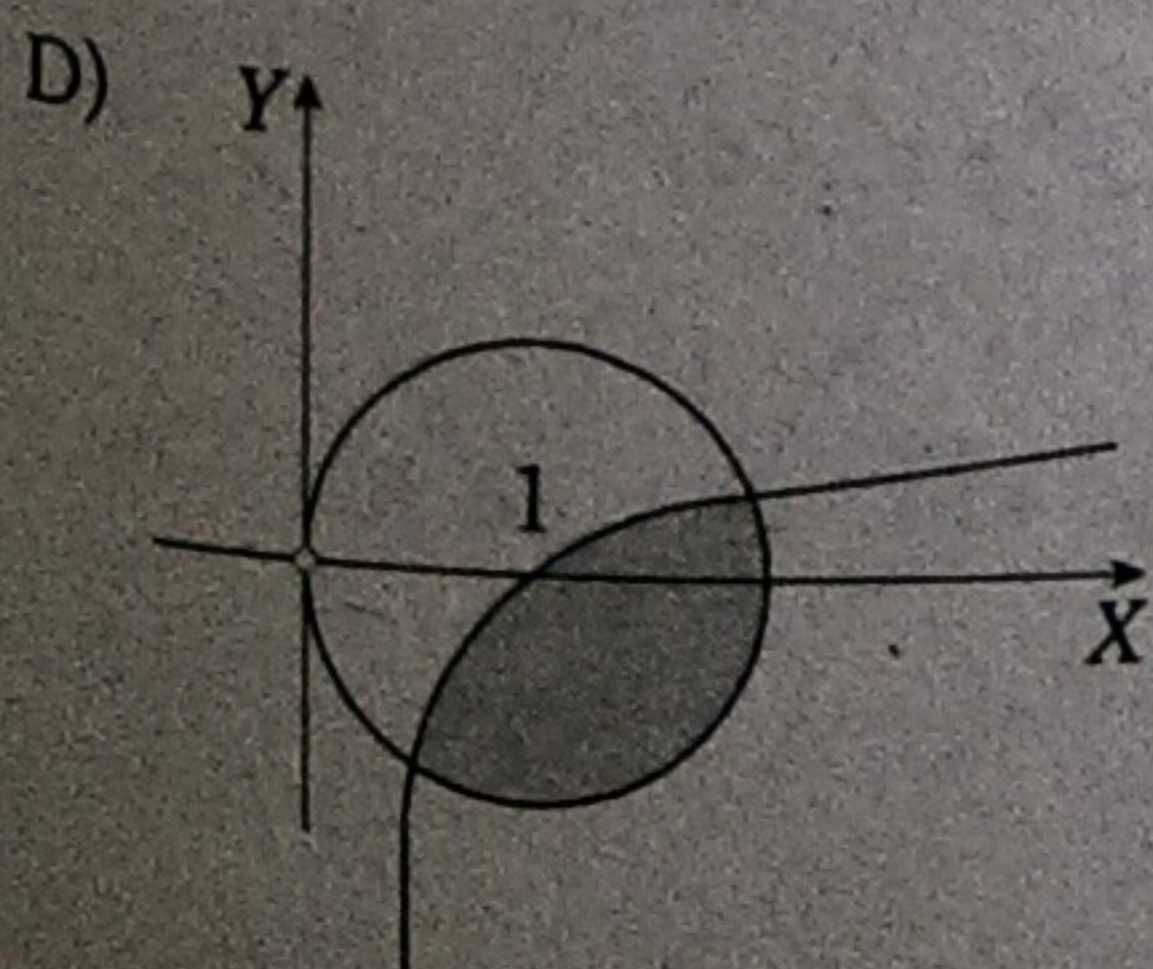
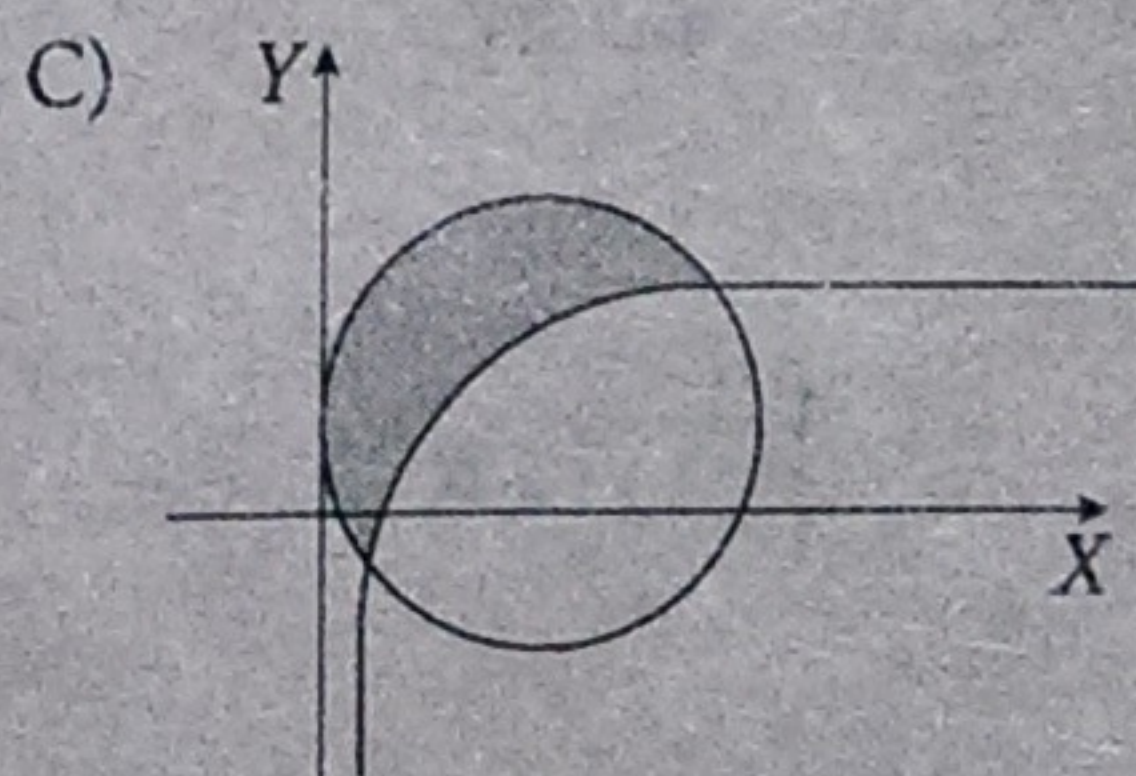
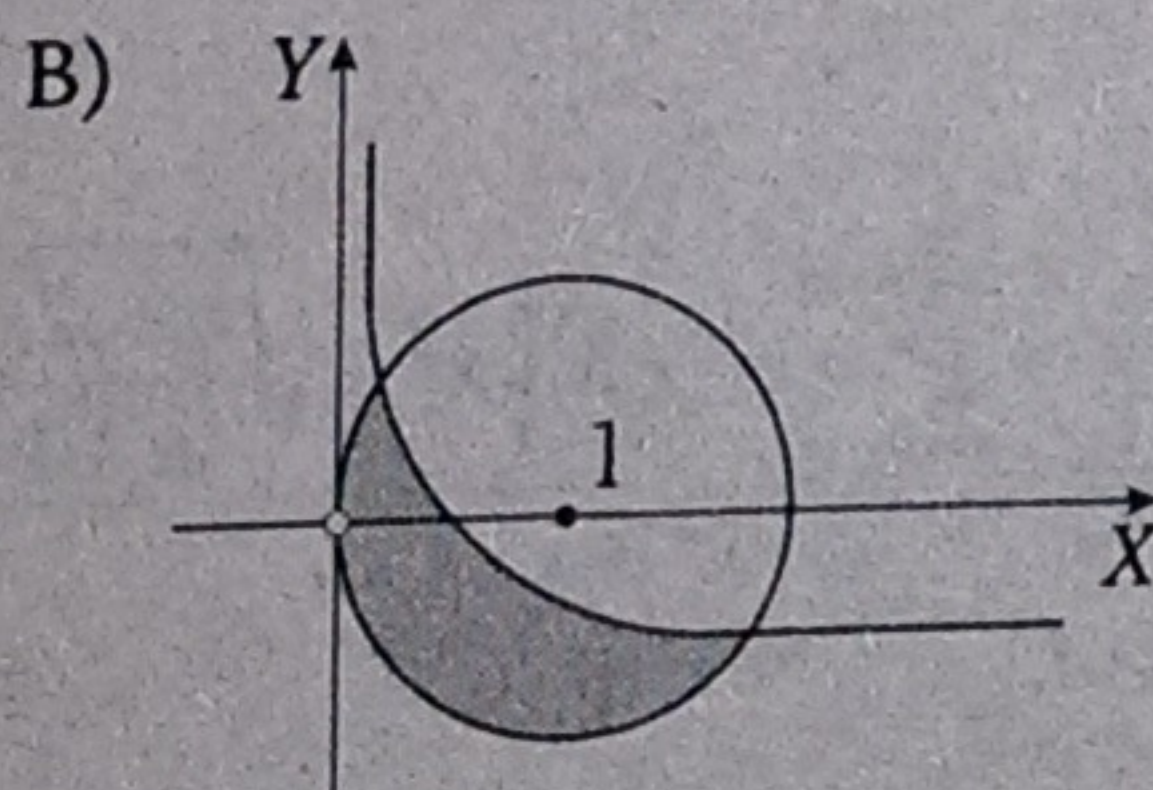
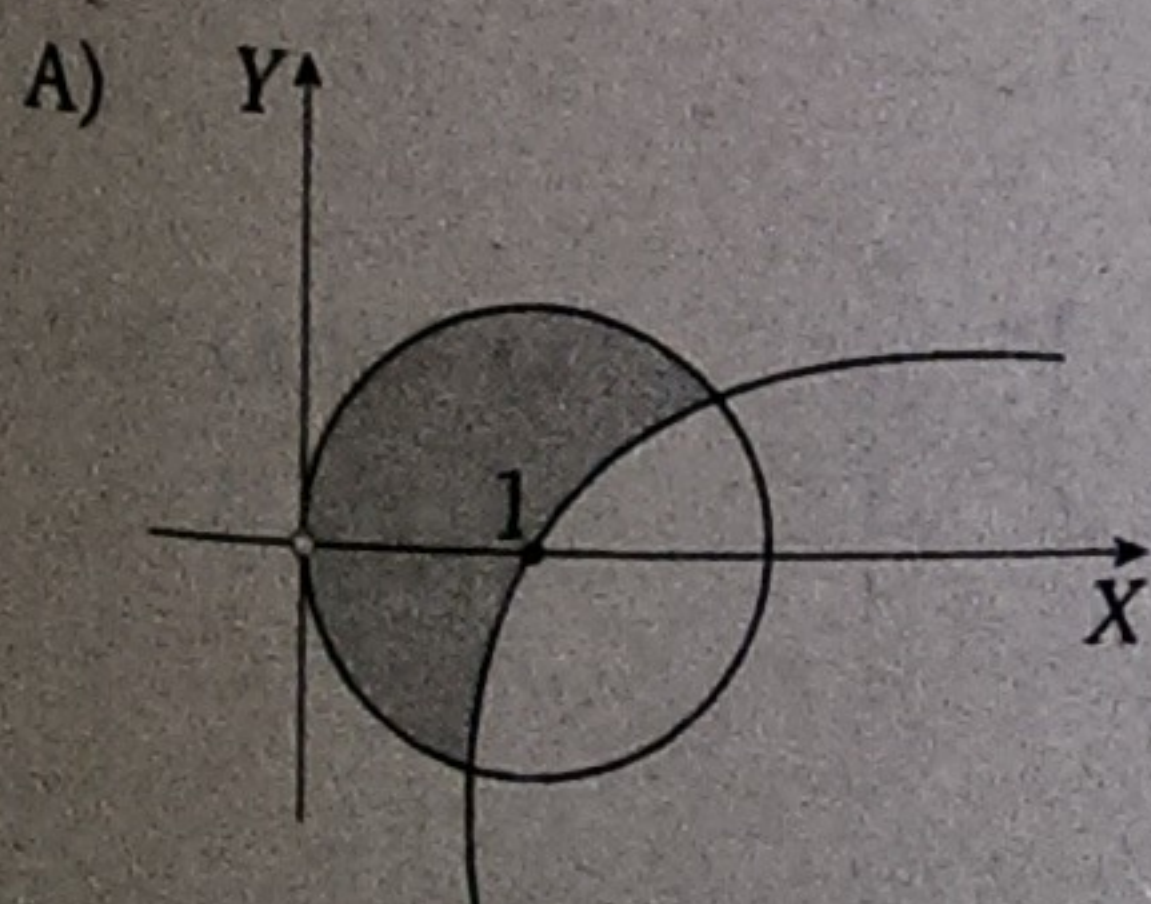
PROBLEMA N.º 55

Esboce la gráfica de $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ si

$$R_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \log_2 x \leq y\};$$

$$R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 + x^2 - 2x + 1 \leq 1\};$$

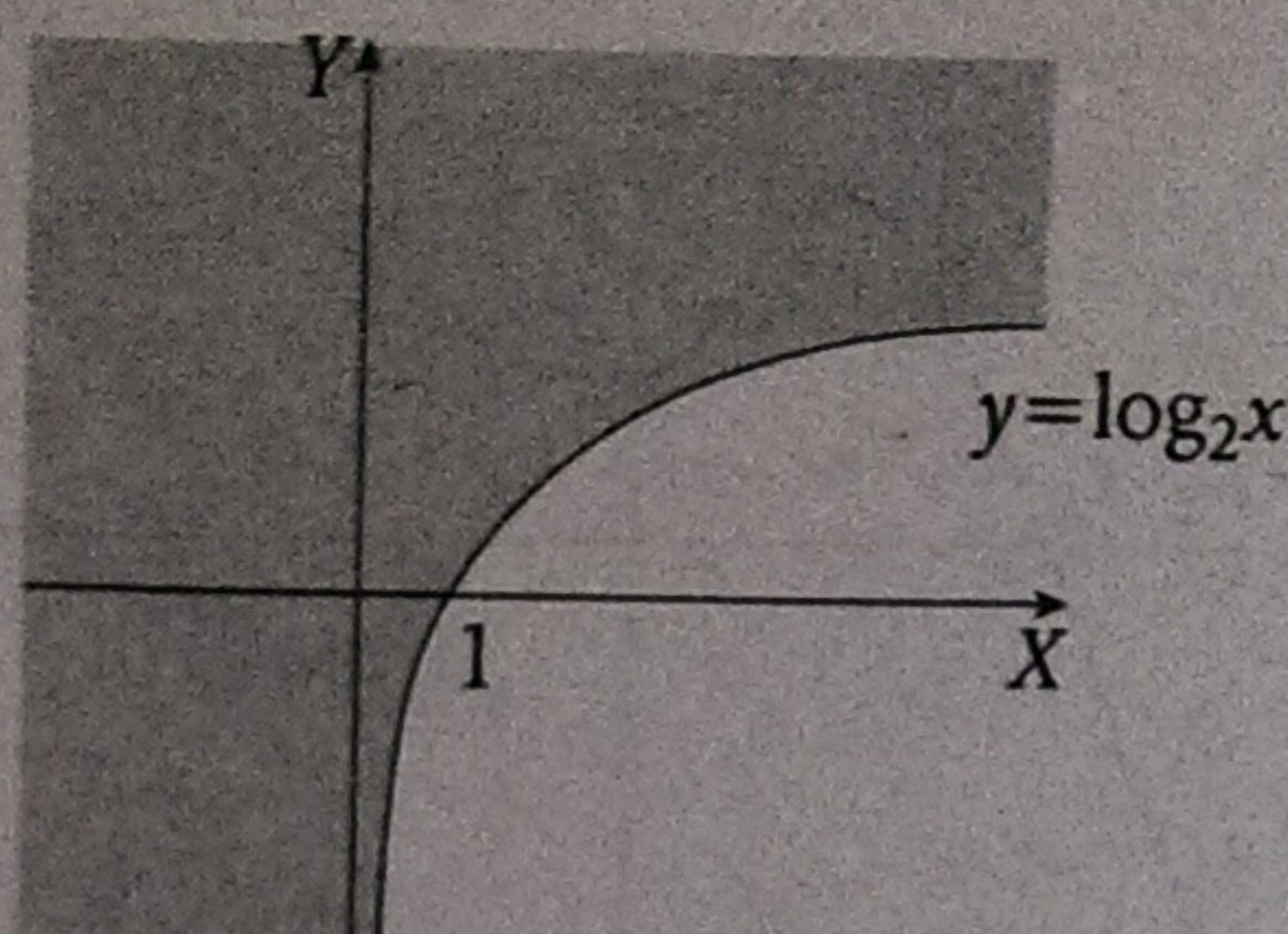
$$R_3 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + 3) \left(x^2 + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x+1}} + x \right)}{x + x^3 + x^5 + x^7} \geq 0 \right\}.$$



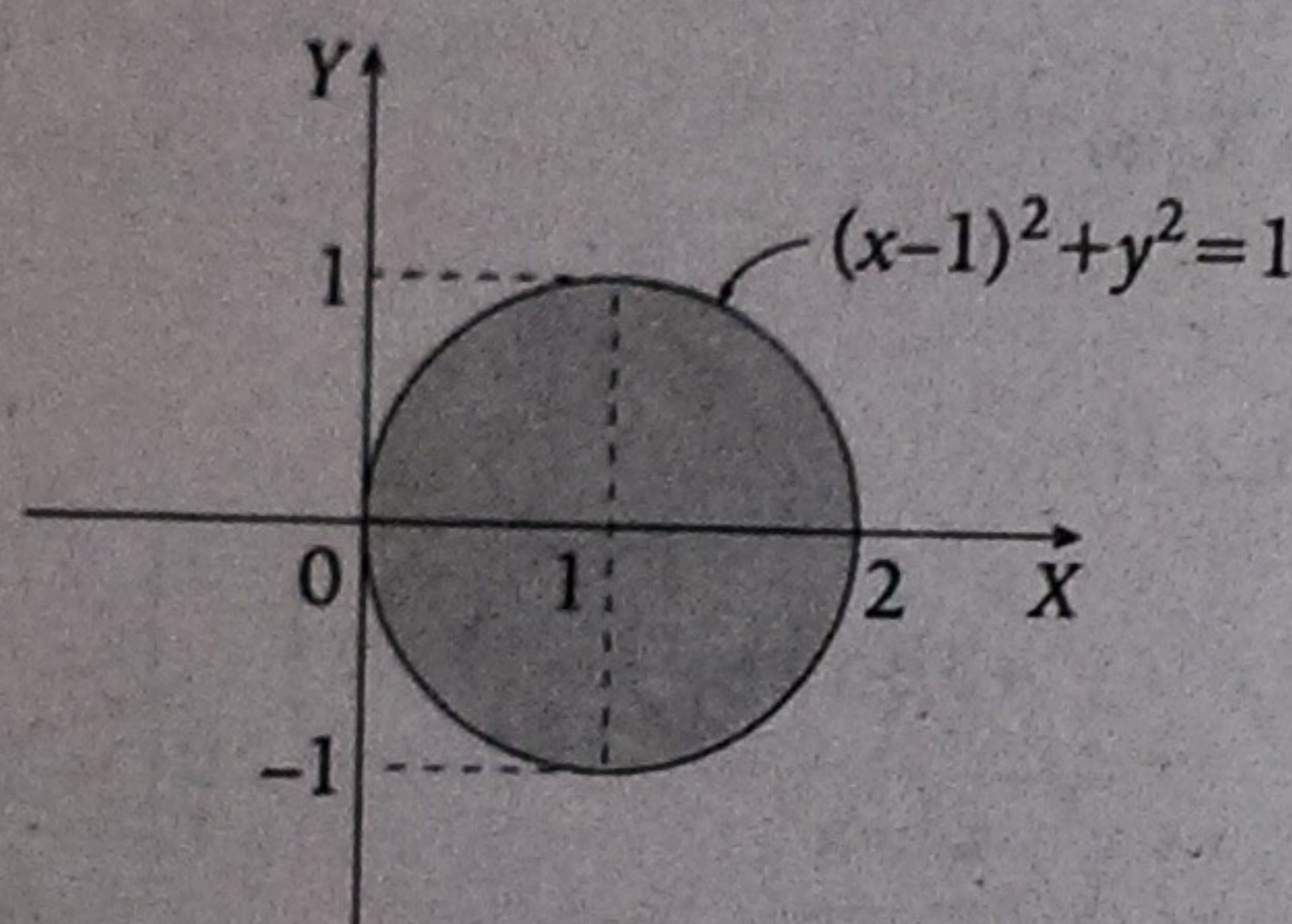
E) no existe

Resolución

- Graficamos $R_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq \log_2 x\}$



- Graficamos $R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$



- Graficamos R_3

$$R_3 = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + 3) \left(x^2 + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x+1}} + x \right)}{x + x^3 + x^5 + x^7} \geq 0 \right\}$$

Como

$$\begin{aligned} y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + 3 &= \frac{1}{2} (y^8 + y^8 + 2y^7 + y^6 + y^6 + 2y^5 + y^4 + y^4 + 6) \\ &= \frac{1}{2} (y^8 + (y^4 + y^3)^2 + (y^3 + y^2)^2 + y^4 + 6) > 0; \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

podemos cancelarlo en la inecuación.

Además, note que $x < 0$, luego $x + x^3 + x^5 + x^7 > 0$

Asimismo

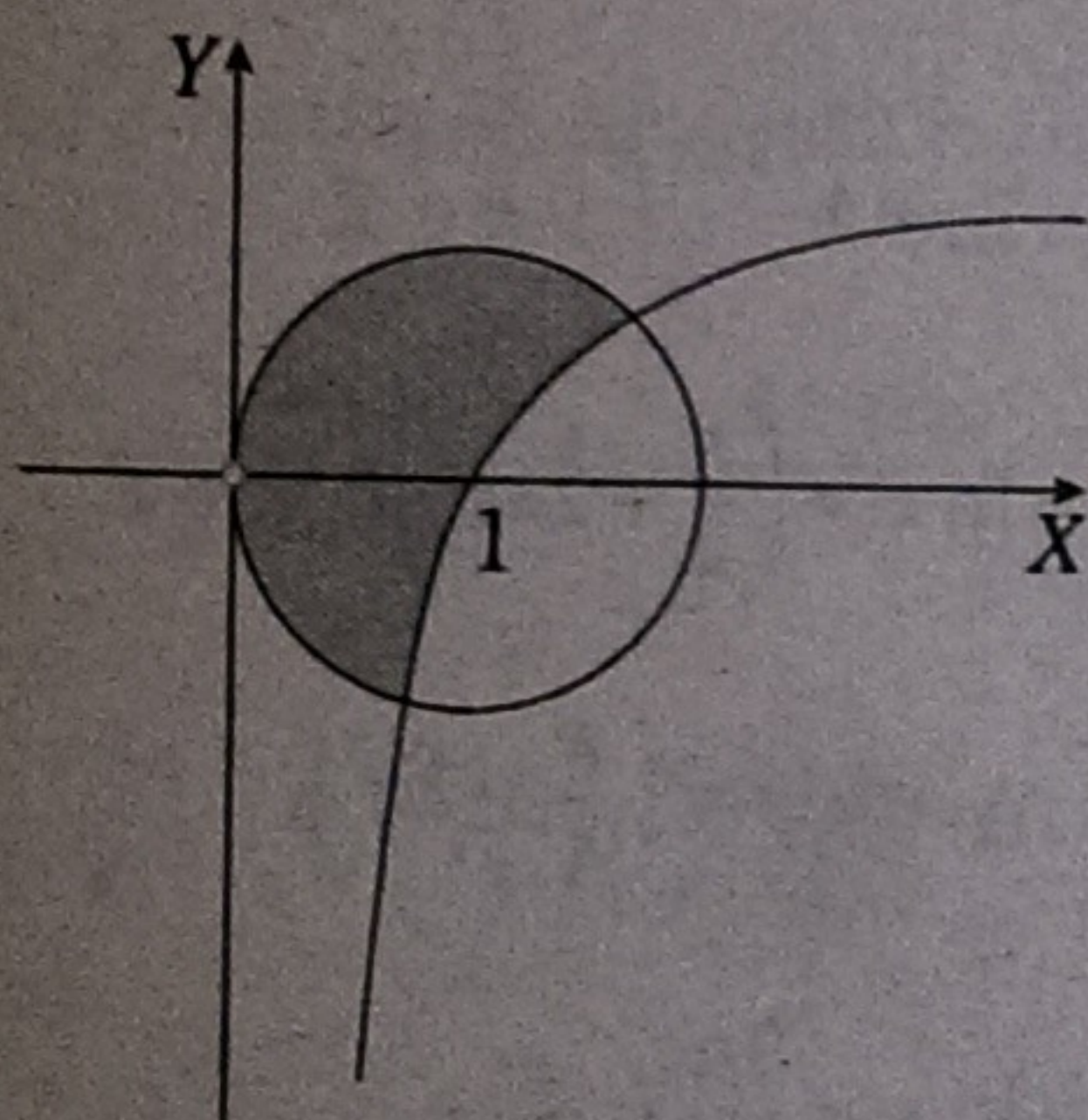
$$x^2 + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x+1}} + x > 0; \quad \forall x \neq 0$$

Luego, la inecuación en R_3 se verifica $\forall y \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Así $R_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \wedge y \in \mathbb{R}\}$

Es decir, todo el plano \mathbb{R}^2 excepto la recta $x=0$.

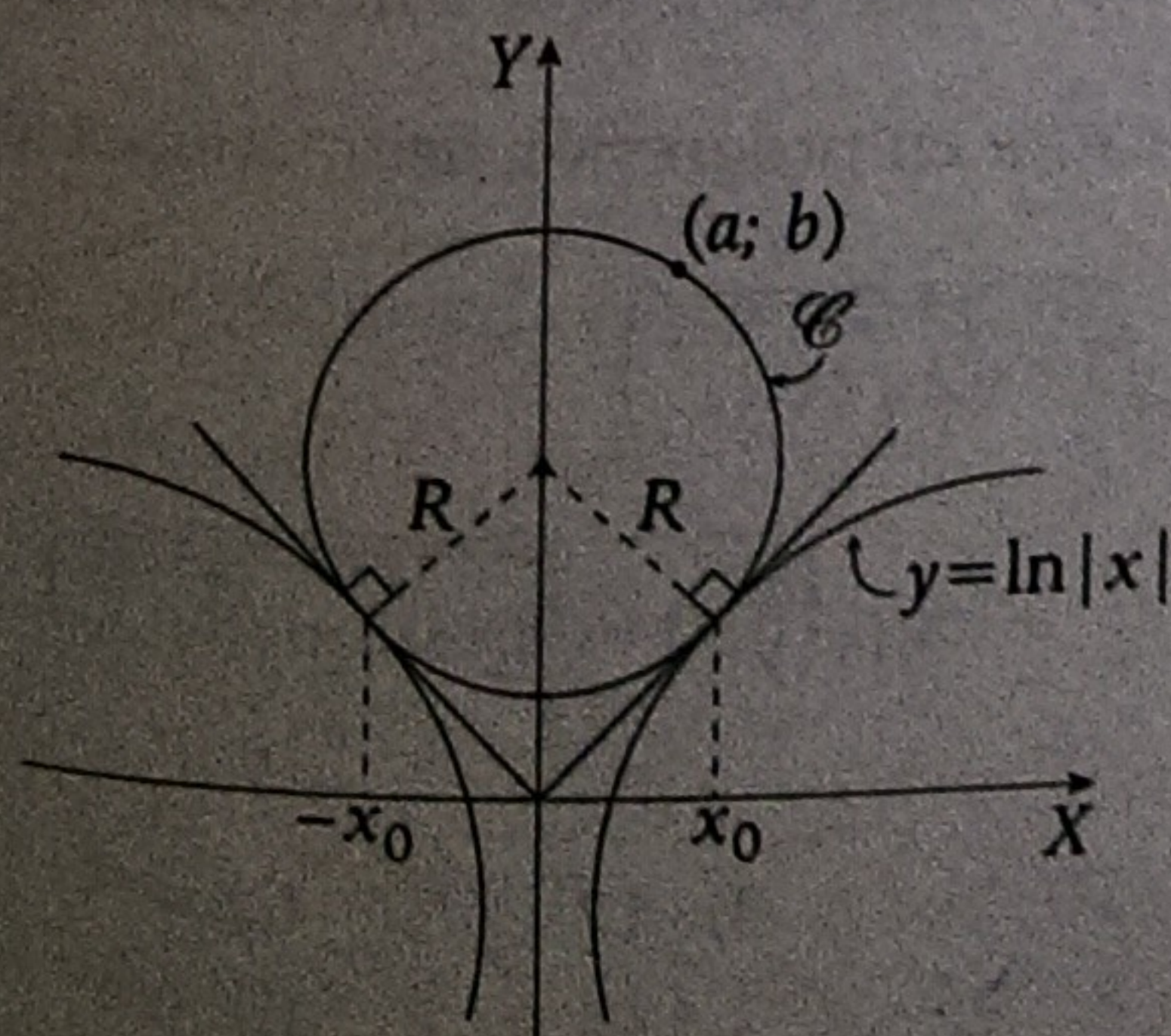
Finalmente $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ es



Clave **A**

PROBLEMA N.º 56

Del gráfico mostrado



Logaritmos

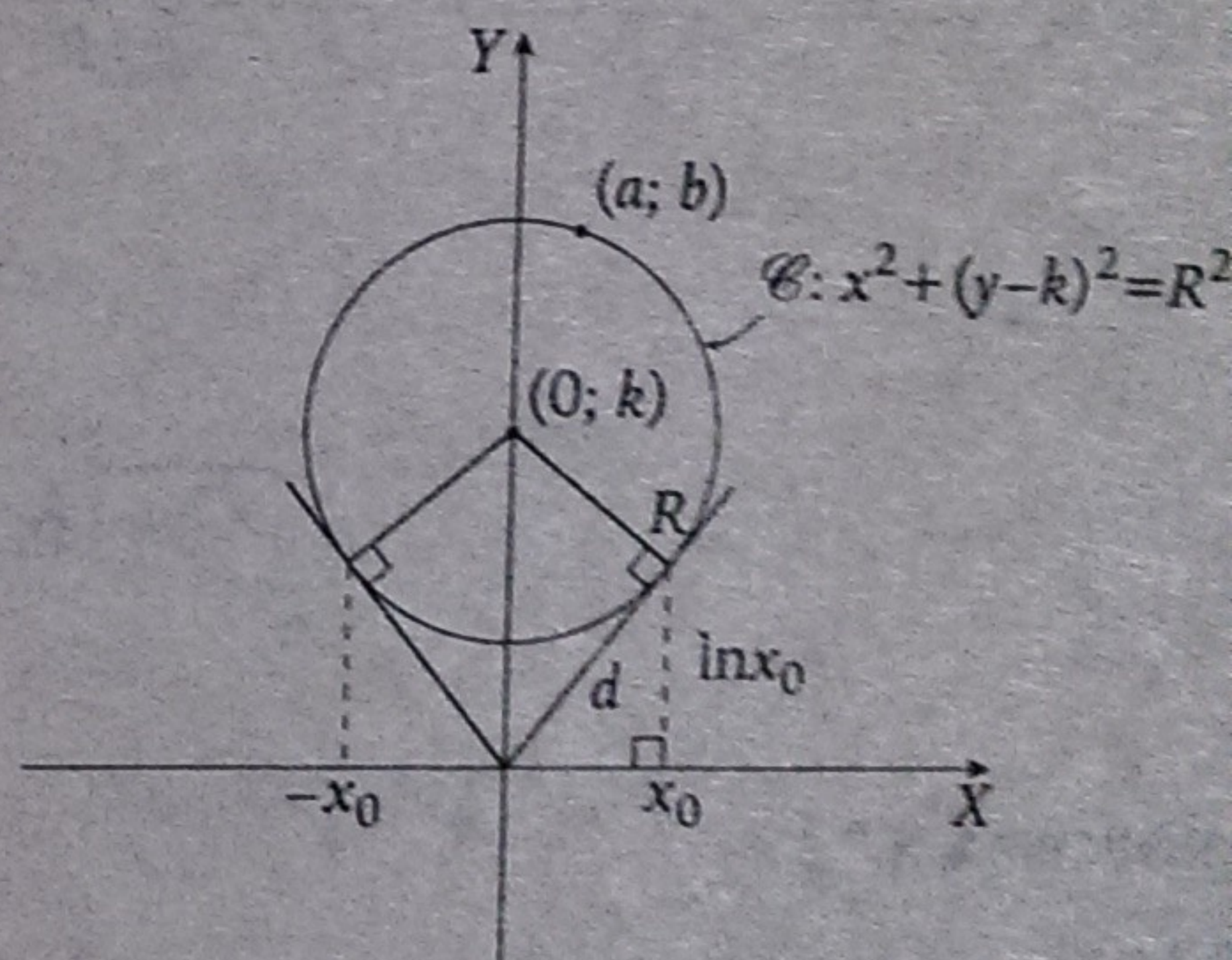
simplifique la expresión

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0}{2b}\right)^2 - (x_0^2 + \ln^2 x_0)}}{R}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Tenemos



Note que

$$d^2 = x_0^2 + \ln^2 x_0 \quad \wedge \quad k^2 = R^2 + d^2$$

$$\rightarrow k^2 = R^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0$$

Como $(a; b) \in \mathcal{C}$, entonces, $a^2 + (b - k)^2 = R^2$

$$\rightarrow a^2 + b^2 - 2bk + k^2 = R^2$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 - 2bk + R^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0 = R^2$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0 = 2bk$$

$$\rightarrow \frac{a^2 + b^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0}{2b} = k$$

$$\rightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0}{2b} \right)^2 = k^2$$

$$\rightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0}{2b} \right)^2 = R^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0$$

$$\rightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0}{2b} \right)^2 - (x_0^2 + \ln^2 x_0) = R^2$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + x_0^2 + \ln^2 x_0}{2b} \right)^2 - (x_0^2 + \ln^2 x_0)}}{R} = \frac{\sqrt{R^2}}{R}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{R^2}}{R} = 1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 57

Calcule un valor de $f_{(x)} = \ln x$ para

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

A) $\frac{9\pi}{4}i$

B) $\frac{\pi}{3}i$

C) $\frac{2\pi}{5}i$

D) $\frac{\pi}{6}i$

E) $\frac{5\pi}{3}i$

Resolución

Tenemos el complejo $x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Como $x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ entonces

$$|x| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \quad \wedge \quad \tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1;$$

$\theta \in \text{IC}$

$$\rightarrow |x| = 1 \quad \wedge \quad \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Luego

$$x = 1 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \ln x = \ln e^{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow f_{(x)} = \ln x = \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si } k=1: f_{(x)} = \ln x = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)i$$

$$\therefore f_{(x)} = \ln x = \frac{9\pi}{4}i$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 58

Calcule el valor de z si los números x ; $(2z)$;

$\left(\frac{3y}{4}\right)$ están en progresión aritmética; además

$$\log_{27} \left(\sqrt{7 + \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}} \right)^x$$

$$+ \log_{16} \left(\sqrt[3]{10 - \sqrt{8 + \sqrt{8 + \sqrt{8 + \dots}}}} \right)^y = 16$$

A) 10

B) 12

C) 4

D) 8

E) 0

Resolución

Recuerda

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}} = 2 \wedge \sqrt{8+\sqrt{8+\sqrt{8+\dots}}} = 2$$

Luego, escribimos la ecuación así

$$\log_{27} \sqrt{7+2^x} + \log_{16} \sqrt[3]{10-2^y} = 16$$

$$\rightarrow \log_{3^3} 3^x + \log_{2^4} 2^y = 16$$

$$\rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 16$$

Como x ; $2z$; $\frac{3y}{4}$ están en progresión aritmética

$$\rightarrow 2z = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3y}{4} \right) \rightarrow 4z = \frac{4x+3y}{4}$$

$$\rightarrow \frac{4z}{3} = \frac{4x+3y}{3 \cdot 4} \rightarrow \frac{4z}{3} = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$$

$$\rightarrow \frac{4z}{3} = 16 \rightarrow z = \frac{3 \cdot 16}{4}$$

$$\therefore z = 12$$

Clave **B**

Logaritmos

Resolución

La ecuación logarítmica

$$x^{\log x} - 100x = \ln|-i|; i = \sqrt{-1}$$

tiene soluciones: x_1, x_2 con $x_1 < x_2$

Resolvemos la ecuación

$$x^{\log x} - 100x = \ln(1)$$

$$\rightarrow x^{\log x} = 100x \rightarrow \log x^{\log x} = \log(100x)$$

$$\rightarrow (\log x)^2 = \log 100 + \log x$$

$$\rightarrow (\log x)^2 - \log x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (\log x - 2)(\log x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \log x - 2 = 0 \vee \log x + 1 = 0$$

$$\rightarrow \log x = 2 \vee \log x = -1$$

$$\rightarrow x_1 = 10^2; x_2 = 10^{-1}$$

Note que $x_1 < x_2$, luego

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10^2}{10^{-1}} = 10^3$$

$$\therefore \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log 10^3 = 3$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 59

Si x_1, x_2 son soluciones de la ecuación

$$x^{\log x} - 100x = \ln|-i|, \text{ donde } i = \sqrt{-1}; x_1 > x_2,$$

calcule el valor de $\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$.

- A) 4 B) 0 C) 1
D) 10 E) 3

PROBLEMA N.º 60

Determine el rango de la función

$$f(x) = \log(|x| - 1).$$

- A) $\langle 1; +\infty \rangle$ B) $\langle -\infty; -1 \rangle$ C) \mathbb{R}^+
D) \mathbb{R}^- E) \mathbb{R}

Resolución

Esbozamos la gráfica de la función

$$\text{como } f(x) = \log(|x| - 1) \wedge f(-x) = \log(|-x| - 1)$$

$$\rightarrow f(x) = f(-x); \forall x \in S = \text{Dom}(f): |x| - 1 < 0$$

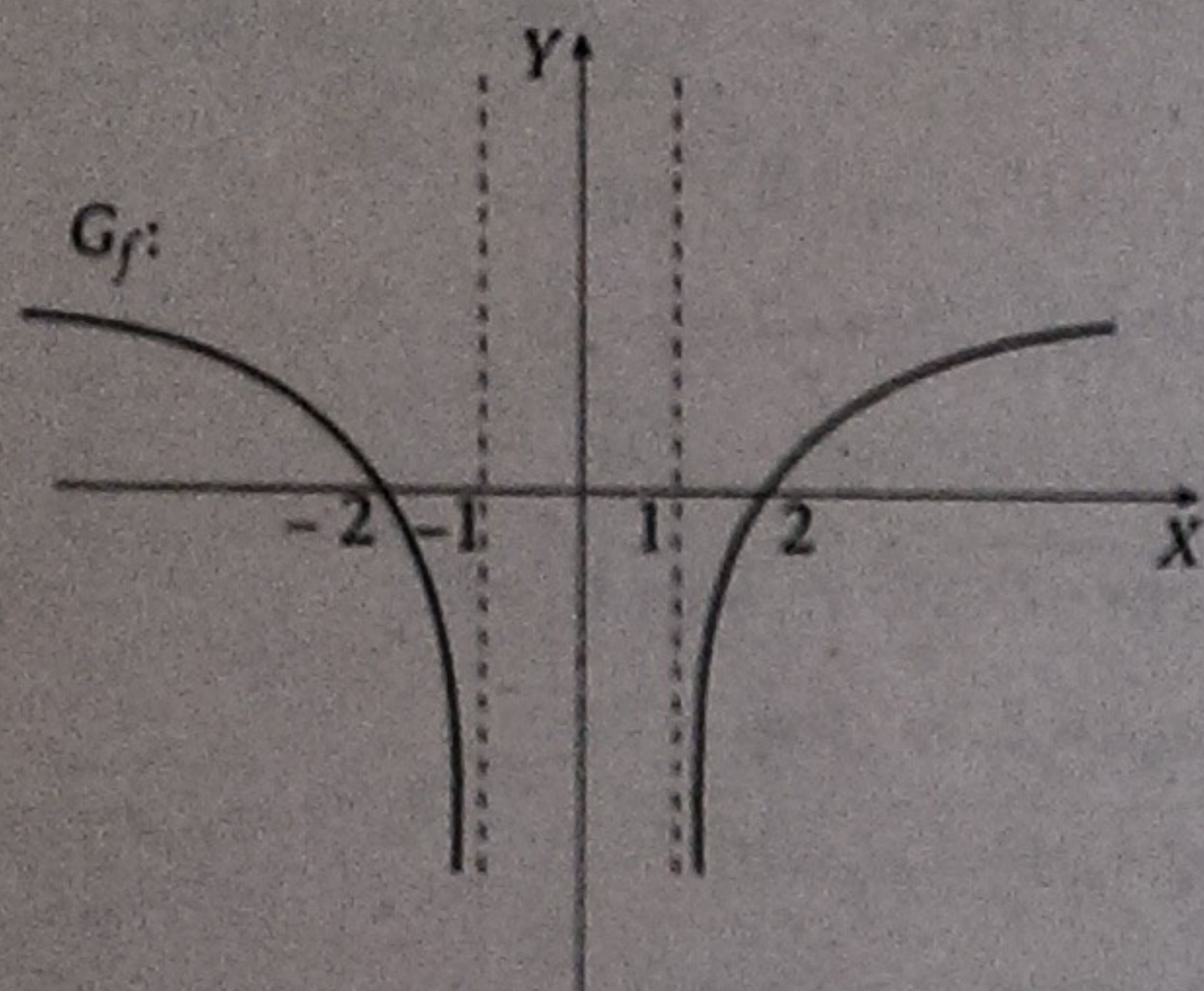
Hallamos $S: |x| < 1 \Leftrightarrow (x < -1 \vee x < 1)$

Luego $S = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$

Así f es una función par.

Dibujaremos la gráfica para $x \geq 0$

$f(x) = \log(x-1)$ y luego reflejamos esta gráfica al eje Y . Así, hallaremos G_f .



Note que $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Clave **E**

PROBLEMA N.º 61

Calcule el valor de M .

$$M = \log_3 5^{\log_5 81} + 9^{\log_3 5} + \log_{\sqrt{23}} \sqrt[4]{23}$$

A) 2

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{59}{2}$

D) $\frac{44}{3}$

E) 0

Resolución

Tenemos que

$$M = \log_3 5^{\log_5 81} + 9^{\log_3 5} + \log_{\sqrt{23}} \sqrt[4]{23}$$

$$\rightarrow M = \log_5 81 \cdot \log_3 5 + 5^{\log_3 9} + \log_{(23)^{\frac{1}{2}}} 23^{\frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow M = \log_3 5 \cdot \log_5 81 + 5^2 + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow M = \log_3 81 + 25 + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow M = 4 + 25 + \frac{1}{2} = 29 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore M = \frac{59}{2}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 62

Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases} \log x + \log y = 8; \\ x^{\log y} = 10^7, \end{cases}$$

calcule el valor de $\log \sqrt[8]{xy}$.

A) 1

B) 7

C) 4

D) 8

E) 0

Resolución

Escribimos el sistema equivalente

$$\begin{cases} \log x + \log y = 8 \\ \log x^{\log y} = \log 10^7 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 8 & \text{(I)} \\ \log x \cdot \log y = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

De la ecuación (I)

$$\log(xy) = 8 \rightarrow xy = 10^8 \rightarrow \sqrt[8]{xy} = 10$$

$$\text{Luego, } \log \sqrt[8]{xy} = \log 10 = 1$$

De otro lado, de las ecuaciones (I) y (II) podemos calcular los valores de x e y , así

$$\bullet \log x = 1 \wedge \log y = 7$$

$$\rightarrow x = 10 \wedge y = 10^7 \rightarrow xy = 10^8$$

$$\bullet \log x = 7 \wedge \log y = 1$$

$$\rightarrow x = 10^7 \wedge y = 10 \rightarrow xy = 10^8$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 63

¿Qué se obtiene luego de efectuar y simplificar

$$\text{colog}_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{0,3} \cdot \log_9 4^{32} + \text{antilog}(\log 9)?$$

$$\text{A) } 9 \qquad \text{B) } 16 \qquad \text{C) } 25$$

$$\text{D) } 27 \qquad \text{E) } 10$$

Resolución

Sea

$$S = \text{colog}_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{0,3} \cdot \log_9 4^{32} + \text{antilog}(\log 9)$$

$$\rightarrow S = \text{colog}_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{0,3} \cdot 32 \log_9 4 + 9$$

$$\rightarrow S = \text{colog}_4 0,3 \cdot 32 \log_9 4 + 9$$

$$\rightarrow S = \text{colog}_4 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 32 \log_9 4 + 9$$

Entonces

$$S = 32 \cdot \log_9 4 \cdot \log_4 3 + 9$$

$$\rightarrow S = 32 \cdot \log_9 3 + 9 = 32 \left(\frac{1}{2}\right) + 9$$

$$\therefore S = 16 + 9 = 25$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 64

Calcule el valor de la incógnita x

$$1 + \frac{\log_a(p-q)}{\log_a(x+q)} = \frac{2 - \log_{p-q} 4}{\log_{(p-q)}(x+q)},$$

donde $p > q > 0$.

$$\text{A) } 2\sqrt{pq} \qquad \text{B) } 3\sqrt{pq} \qquad \text{C) } 2\sqrt{p+q}$$

$$\text{D) } \frac{p-5q}{4} \qquad \text{E) } \sqrt{p-q}$$

Resolución

Considerando $p < q < 0$, despejaremos la incógnita x de la ecuación logarítmica

$$1 + \frac{\log_a(p-q)}{\log_a(x+q)} = \frac{2 - \log_{(p-q)}(4)}{\log_{(p-q)}(x+q)}; a < 0 \wedge a \neq 1$$

$$\rightarrow 1 + \log_{(x+q)}(p-q) = \frac{2 - \log_{(p-q)}(4)}{\log_{(p-q)}(x+q)}$$

$$\rightarrow \log_{(p-q)}(x+q) + \log_{(p-q)}(x+q) \cdot \log_{(x+q)}(p-q) = 2 - \log_{(p-q)} 4$$

$$\rightarrow \log_{(p-q)}(x+q) + \underbrace{\log_{(p-q)}(p-q)}_1 = 2 - \log_{(p-q)} 4$$

$$\rightarrow \log_{(p-q)}(x+q) + \log_{(p-q)} 4 = 2 - 1$$

$$\rightarrow \log_{(p-q)} 4(x+q) = 1 \rightarrow 4(x+q) = p-q$$

Finalmente

$$4x + 4q = p - q \rightarrow 4x = p - 5q$$

$$\therefore x = \frac{p - 5q}{4}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 65

Luego de resolver la ecuación

$(\log_{\text{sen} x} 2) \cdot (\log_{\text{sen}^2 x} a) + 1 = 0$, donde $a \in \langle 0; 1 \rangle$, calcule el valor de $\text{sen} x$.

- A) 2^{-1} B) $2^{-\log_2 a}$ C) $2^{\sqrt{\frac{-\log_2 a}{2}}}$
D) $2^{\sqrt{\log_2 a}}$ E) $2^{\frac{1}{2 \log_a 2}}$

Resolución

Considerando $a \in \langle 0; 1 \rangle$ resolveremos la ecuación

$$(\log_{\text{sen} x} 2)(\log_{\text{sen}^2 x} a) + 1 = 0; \text{sen} x < 0 \quad \wedge \quad \text{sen} x \neq 1$$

para calcular el valor de $\text{sen} x$.

$$\text{Sea } \text{sen} x = y < 0 \quad \wedge \quad y \neq 1: \log_y 2 \cdot \log_y a = -1$$

$$\rightarrow \log_y 2 \cdot \log_y \sqrt{a} = -1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log_y 2 \cdot \log_y a = -1$$

$$\rightarrow \log_y 2 \cdot \log_y a = -2 \rightarrow \frac{1}{\log_2 y} \cdot \frac{\log_2 a}{\log_2 y} = -2$$

$$\rightarrow \log_2 a = -2(\log_2 y)^2 \rightarrow (\log_2 y)^2 = \frac{-\log_2 a}{2}$$

$$\rightarrow \log_2 y = \sqrt{\frac{-\log_2 a}{2}} \rightarrow y = 2^{\sqrt{\frac{-\log_2 a}{2}}}$$

$$\therefore \text{sen} x = 2^{\sqrt{\frac{-\log_2 a}{2}}}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 66

La población de una nación crece cada año en $\left(\frac{1}{100}\right)$ de lo que era el año precedente.

¿En cuántos años la población logrará ser dos veces más que la inicial?

Considere:

$$\log 1,01 = 0,00432137$$

$$\log 3 = 0,47712$$

- A) 110,4
B) más de 112 años
C) 100
D) 111
E) 99

Resolución

Tenemos que

P_0 : población inicial

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{100} P_0 = \left(1 + \frac{1}{100}\right) P_0$$

$$P_2 = \left(1 + \frac{1}{100}\right) P_1 = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \left(1 + \frac{1}{100}\right) P_2 = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^3 P_0$$

\vdots

$$P_t = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^t P_0$$

Como queremos que P_t sea dos veces más que P_0

$$\rightarrow P_t = 3P_0$$

Luego

$$3\% = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^t \rightarrow 3 = (1,01)^t$$

Aplicamos logaritmos en base 10

$$\log 3 = \log(1,01)^t \rightarrow \log 3 = t \cdot \log(1,01)$$

$$\rightarrow 0,47712 = t(0,00432137)$$

$$\therefore t = \frac{0,47712}{0,00432137} \approx 110,40943$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 67

Resuelva la ecuación $x^{\log_a y} + y^{\log_a x} = 2x^3$
si $a \in (1; +\infty)$, e indique los valores de x e y .

- A) $y = a^3; x \in \mathbb{R}^+$
- B) $x = 1; y \in \mathbb{R}^+$
- C) $\{x; y\} \in \mathbb{R}$
- D) A y B
- E) A o B

Resolución

Como $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$, escribimos la ecuación así

$$x^{\log_a y} + x^{\log_a y} = 2x^3; x \text{ e } y \text{ positivos } \wedge a < 1$$

$$\rightarrow 2x^{\log_a y} = 2x^3$$

$$\rightarrow \log_a y = 3$$

$$\rightarrow y = a^3$$

Luego,

$$x \in \mathbb{R}^+; y = a^3$$

Logaritmos

De otro lado si $x=1$ entonces la ecuación queda así

$$1^{\log_a y} + y^{\log_a 1} = 2 \cdot 1^3; y < 0$$

$$\rightarrow 1 + y^0 = 2; y < 0$$

$$\rightarrow 1 + 1 = 2; y < 0$$

lo cual es verdadero.

Luego, $x=1; y \in \mathbb{R}^+$

$$\therefore (x \in \mathbb{R}^+; y = a^3) \wedge (x=1; y \in \mathbb{R}^+)$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 68

El logaritmo de N en base 7 es el mismo que el logaritmo de M en base $\sqrt{7}$. Si $M+N=3/4$, calcule el valor de M/N .

- A) $1/2$ B) $1/4$ C) 2
- D) $1/8$ E) $1/6$

Resolución

De la información del problema tenemos

$$\log_7 N = \log_{\sqrt{7}} M \wedge M + N = \frac{3}{4}$$

$\wedge M; N$ positivos

$$\rightarrow \log_7 N = \log_7 M^2 \rightarrow N = M^2$$

Como

$$M + N = \frac{3}{4} \rightarrow M + M^2 = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow 4M + 4M^2 = 3$$

$$\rightarrow 4M^2 + 4M - 3 = 0; M < 0$$

$$\rightarrow (2M-1)(\underbrace{2M+3}_{(+)}) = 0; M > 0$$

$$\rightarrow 2M - 1 = 0 \rightarrow 2M = 1 \rightarrow M = \frac{1}{2}$$

$$\text{Como } N = M^2 \rightarrow N = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{M}{N} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.º 69

Si $ab=c$, calcule el valor de

$$\sqrt[4]{\frac{\log^3 a^3 + \log^3 b^3 + \text{colog}^3 c^3}{\text{colog} a \cdot \text{colog} b \cdot \text{colog} c}}$$

- A) 3 B) 10 C) 11
D) 12 E) $\sqrt{2}$

Resolución

$$\text{De } ab=c \text{ se tiene } \frac{ab}{c} = 1$$

$$\rightarrow abc^{-1} = 1$$

$$\rightarrow \log(abc^{-1}) = \log 1$$

$$\rightarrow \log a + \log b + \log c^{-1} = 0$$

$$\rightarrow \log a + \log b + \text{colog} c = 0$$

$$\rightarrow 3\log a + 3\log b + 3\text{colog} c = 3 \cdot 0$$

$$\rightarrow \log a^3 + \log b^3 + \text{colog} c^3 = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (\log a^3)^3 + (\log b^3)^3 + (\text{colog} c^3)^3 \\ = 3\log a^3 \cdot \log b^3 \cdot \text{colog} c^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (\log a^3)^3 + (\log b^3)^3 + (\text{colog} c^3)^3 \\ = 3^4 \cdot \log a \cdot \log b \cdot \text{colog} c \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{(\log a^3)^3 + (\log b^3)^3 + (\text{colog} c^3)^3}{\log a \cdot \log b \cdot \text{colog} c} = 3^4$$

$$\rightarrow \frac{(\log a^3)^3 + (\log b^3)^3 + (\text{colog} c^3)^3}{(-\log a)(-\log b)(\text{colog} c)} = 3^4$$

$$\therefore \sqrt[4]{\frac{(\log a^3)^3 + (\log b^3)^3 + (\text{colog} c^3)^3}{\text{colog} a \cdot \text{colog} b \cdot \text{colog} c}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 70

Si $\log_b a$ y $\log_{\sqrt{2}} b$ son cantidades positivas y $\log_b a + 11\log_a b = 12 \wedge \log_{\sqrt{2}} b - 7\log_b \sqrt{2} = -1$, calcule un valor posible de $\log_2(8a^6) + 4\log_{0.5} a$. Considere $a \neq b$.

- A) 10 B) 12 C) 16
D) 14 E) 20

Resolución

Considerando que

$$\log_b a > 0 \wedge \log_{\sqrt{2}} b > 0 \text{ tenemos}$$

$$\log_b a + 11\log_a b = 12; a \neq b$$

$$\text{Sea } \log_b a = x; x + \frac{11}{x} = 12;$$

$$\rightarrow x^2 + 11 = 12x \rightarrow x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(x-1)}_{\neq 0} (x-11) = 0 \rightarrow x-11=0 \rightarrow x=11$$

Luego

$$\log_b a = 11 \rightarrow a = b^{11}$$

$$\log_{\sqrt{2}} b - 7 \cdot \log_b \sqrt[7]{2} = -1$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt{2}} b^2 - \log_b \sqrt[7]{2}^7 = -1$$

$$\rightarrow \log_2 b^2 - \log_b 2 = -1$$

$$\rightarrow 2\log_2 b - \log_b 2 = -1$$

$$\text{Sea } \log_2 b = y: 2y - \frac{1}{y} = -1; y > 0$$

$$\rightarrow 2y^2 - 1 = -y \rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$\rightarrow (2y-1)(y+1) = 0 \rightarrow 2y-1=0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

(+)

Luego

$$\log_2 b = \frac{1}{2} \rightarrow b = \sqrt{2} \rightarrow a = \sqrt{2}^{11}$$

$$\rightarrow a^6 = \sqrt{2}^{66} \rightarrow a^6 = 2^{33} \rightarrow 8a^6 = 2^{36}$$

También

$$a^4 = \sqrt{2}^{44} \rightarrow a^4 = 2^{22}$$

Debemos calcular M

$$\rightarrow M = \log_2 (8a^6) + 4\log_{0,5} a$$

$$\rightarrow M = \log_2 (2^{36}) + \log_{\frac{1}{2}} a^4$$

$$\rightarrow M = \log_2 2^{36} + \log_2 (2^{22})^{-1}$$

$$\rightarrow M = 36 + \log_2 2^{-22}$$

$$\therefore M = 36 - 22 = 14$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 71

Se sabe que

- $\log x - \log 23 = \log y + 1$
- $(0,005134)^{2,29} \cdot \text{antilog}(x-y)^2 = 1$.

Considere $\log 51,34 = 1,710$ para calcular el valor de x.

A) 2,01

B) 2,19

C) 2,29

D) 2,30

E) 2,41

Resolución

Sea

$$N = (0,005134)^{2,29}$$

$$\rightarrow N = (51,34 \times 10^{-4})^{2,29}$$

$$\rightarrow \log N = \log (51,34 \times 10^{-4})^{2,29} = 2,29 [\log 51,34 + \log 10^{-4}]$$

Como $\log 51,34 = 1,710$ entonces

$$\log N = (2,29)(1,710 - 4) = (2,29)(-2,29) = -(2,29)^2$$

Luego, escribimos el sistema equivalente así

$$\begin{cases} \log x = \log y + \log 23 + 1 & \text{(I)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \cdot \text{antilog}(x-y)^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Note que x e y son positivos.

De (I) tenemos:

$$\log x = \log y + \log 23 + \log 10$$

$$\rightarrow \log x = \log (230y)$$

$$\rightarrow x = 230y$$

En (II) aplicamos logaritmos en base 10, así

$$\log(N \cdot \text{antilog}(x-y)^2) = \log 1$$

$$\rightarrow \log N + \log(\text{antilog}(x-y)^2) = 0$$

$$\rightarrow -(2,29)^2 + (x-y)^2 = 0$$

$$\rightarrow (x-y)^2 = (2,29)^2$$

Como $x = 230y$: $(230y - y)^2 = (2,29)^2$

$$\rightarrow (229y)^2 = (2,29)^2$$

$$\rightarrow 229y = 2,29$$

$$\rightarrow y = \frac{2,29}{229} = \frac{1}{100} \rightarrow x = 230 \cdot \frac{1}{100}$$

$$\therefore x = 2,30$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 72

Si $a < 1$; $b < 1$; $c < 1$; $N < 1$,

simplifique la expresión

$$b^a \left(\frac{\log \log_b (\text{antilog}_c \text{colog}_c N)}{\log a} \right)$$

A) $abcN$

B) a

C) $-N$

D) N

E) $1/N$

Resolución

Teniendo en cuenta que

$$a < 1; b < 1; c < 1; N < 1$$

simplificaremos la siguiente expresión

$$S = b^a \left(\frac{\log \log_b (\text{antilog}_c \text{colog}_c N)}{\log a} \right)$$

Sea $x = \log_b (\text{antilog}_c \text{colog}_c N)$

$$\rightarrow x = \log_b (\text{antilog}_c \log_c N^{-1})$$

$$\rightarrow x = \log_b (N^{-1})$$

Como $\frac{\log x}{\log a} = \log_a x$, entonces

$$S = b^a \left(\frac{\log x}{\log a} \right) = b^{a \log_a x} = b^x$$

Como $x = \log_b (N^{-1})$

$$\rightarrow S = b^{\log_b (N^{-1})} = N^{-1}$$

$$\therefore S = \frac{1}{N}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.º 73

Si $\frac{1 - 2 \log_{xy} y}{1 + 2 \log_{\left(\frac{x}{y}\right) y}} = 9$, calcule el valor de M .

$$M = \log_{\left(\frac{x}{y}\right) xy} + \log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right)$$

A) $10/3$

B) $1/3$

C) 1

D) $1/2$

E) 2

Resolución

Tenemos que

$$\frac{1 - \log_{xy} y^2}{1 + \log_{\frac{x}{y}} y^2} = 9$$

$$\rightarrow \frac{\log_{xy} xy - \log_{xy} y^2}{\log_{\frac{x}{y}} \frac{x}{y} + \log_{\frac{x}{y}} y^2} = 9 \rightarrow \frac{\log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right)}{\log_{\frac{x}{y}} (xy)} = 9$$

$$\log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right) \cdot \log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right) = 9 \rightarrow \left[\log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right) \right]^2 = 9$$

Consideremos

$$\log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right) = 3 \rightarrow \log_{\left(\frac{x}{y} \right)} xy = \frac{1}{3}$$

Luego

$$M = \log_{\left(\frac{x}{y} \right)} xy + \log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 74

Resuelva la inecuación

$$\sqrt{\log x - 1} + 21 > \log x.$$

- A) $[10; 10^{26}]$
- B) $\langle 17; 26 \rangle$
- C) $\langle 10^{17}; 10^{26} \rangle$
- D) $[10; 10^{26})$
- E) $\langle 1; 26 \rangle$

Resolución

Resolveremos la inecuación así

$$\sqrt{\log x - 1} + 20 > \log x - 1$$

$$\text{con } x < 0 \wedge \log x - 1 \geq 0$$

$$\rightarrow \sqrt{\log x - 1} + 20 > \sqrt{\log x - 1}^2; x > 0 \wedge \log x \geq 1$$

$$\rightarrow \sqrt{\log x - 1}^2 - \sqrt{\log x - 1} - 20 < 0; \underbrace{x > 0 \wedge x \geq 10}_{x \geq 10}$$

Sea

$$\sqrt{\log x - 1} = t \geq 0$$

$$\rightarrow t^2 - t - 20 < 0 \rightarrow (t - 5)(\underbrace{t + 4}_{(+)}) < 0$$

$$\rightarrow t - 5 < 0 \rightarrow t = \sqrt{\log x - 1} < 5 \wedge x \geq 10$$

Luego

$$\rightarrow \log x - 1 < 25 \wedge x < 10$$

$$\rightarrow \log x < 26 \wedge x \geq 10$$

$$\rightarrow x \geq 10 \wedge x < 10^{26}$$

$$\rightarrow 10 \leq x < 10^{26}$$

$$\therefore CS = [10; 10^{26})$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 75

Resuelva la inecuación $x^{1 + \log_b x} < b^2 x; b < 1.$

- A) $\langle -\infty; 0 \rangle$
- B) $\langle 0; +\infty \rangle$
- C) $\langle 0; b^{-\sqrt{2}} \rangle \cup \langle b^{\sqrt{2}}; +\infty \rangle$
- D) $\langle -\infty; \sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; +\infty \rangle$
- E) $\langle -\infty; -b \rangle \cup \langle b; +\infty \rangle$

Resolución

En la inecuación exponencial-logarítmica,

$$b < 1 \wedge x < 0$$

Luego

$$x \cdot x^{\log_b x} > b^2 \cdot x \rightarrow x^{\log_b x} > b^2$$

Aplicamos logaritmo en base b

$$\log_b x^{\log_b x} > \log_b b^2 \rightarrow (\log_b x)^2 > 2$$

$$\rightarrow \sqrt{(\log_b x)^2} > \sqrt{2} \rightarrow |\log_b x| > \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \log_b x < -\sqrt{2} \vee \log_b x > \sqrt{2}; b > 1$$

$$\rightarrow 0 < x < b^{-\sqrt{2}} \vee x > b^{\sqrt{2}}$$

$$\therefore CS = \langle 0; b^{-\sqrt{2}} \rangle \cup \langle b^{\sqrt{2}}; +\infty \rangle$$

Clave **C**

Hallamos el CVA

$$x < 0 \wedge |\log x - 2| - 1 \geq 0$$

$$\rightarrow x < 0 \wedge |\log x - 2| \geq 1$$

$$\rightarrow x < 0 \wedge (\log x - 2 \leq -1 \vee \log x - 2 \geq 1)$$

$$\rightarrow x < 0 \wedge (\log x \leq 1 \vee \log x \geq 3)$$

$$\rightarrow x < 0 \wedge (x \leq 10 \vee x \geq 10^3)$$

$$\rightarrow 0 < x \leq 10 \vee x \geq 10^3$$

$$\rightarrow CS = \langle 0; 10 \rangle \cup [10^3; +\infty)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ a & b \end{array}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{10^3}{10} = 10^2$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 76

Si $\langle 0; a \rangle \cup [b; +\infty)$ es el conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{|\log x - 2| - 1} > \ln\left(\frac{1}{e^2}\right), \text{ calcule el valor de } b/a.$$

- A) 10^{-1} B) 1 C) 10
D) 10^2 E) 10^3

Resolución

La inecuación logarítmica

$$\sqrt{|\log x - 2| - 1} > \ln(e^{-2}) \text{ tiene } CS = \langle 0; a \rangle \cup [b; +\infty)$$

como $\sqrt{|\log x - 2| - 1} > -2$ entonces

$$\underbrace{\sqrt{|\log x - 2| - 1} + 2}_{(+)} > 0 \text{ se verifica } \forall x \in CVA$$

PROBLEMA N.º 77

Si $\log_m a = 2$; $\log_m b = 3$; $\log_m c = 4$, calcule el menor valor de $a+b+c$.

- A) m
B) $3m$
C) $3m^3$
D) m^3
E) m^9

Resolución

Consideremos que los siguientes logaritmos existen $\log_m a = 2$; $\log_m b = 3$; $\log_m c = 4$

$$\rightarrow a = m^2; b = m^3; c = m^4$$

(note que a ; b y c son positivos, pues $m > 0$)

Luego, aplicamos $M_A \geq M_G$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{m^2 \cdot m^3 \cdot m^4} = \sqrt[3]{m^9}$$

$$\rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq m^3 \rightarrow a+b+c \geq 3m^3$$

Por lo tanto, el menor valor de $(a+b+c)$ es $3m^3$.

Clave **C**

PROBLEMA N.º 78

Calcule con siete cifras decimales el valor de x .

$$x = \sqrt[8]{\frac{\sqrt[3]{0,002} \times 0,0028}{0,04 \times 11 \times \sqrt[3]{6,75869}}}$$

- A) 0,3477395
- B) 0,3788166
- C) 0,2943563
- D) 0,2882317
- E) 0,2935439

Resolución

Tenemos

$$x^8 = \frac{\sqrt[3]{0,002} \cdot (0,0028)^{0,07}}{(0,04)(11)\sqrt[3]{6,75869}}$$

$$\rightarrow x^8 = \frac{\sqrt[3]{0,002} \cdot (0,07)}{11 \cdot \sqrt[3]{6,75869}}$$

Luego

$$\rightarrow x^8 = \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{1000}} \cdot \frac{7}{100}}{11 \cdot \sqrt[3]{\frac{6758690}{1000000}}}$$

Logaritmos

$$\rightarrow x^8 = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{10} \cdot \frac{7}{10^2}}{11 \cdot \sqrt[3]{\frac{6758690}{10^2}}}$$

$$\rightarrow x^8 = \frac{7(\sqrt[3]{2})}{(10)(11)\sqrt[3]{6758690}} \quad (I)$$

Tenemos en cuenta que

$$\log 2 = 0,301030; \log 7 = 0,845098$$

$$\log 11 = 1,041392; \log 6758690 = 6,829862$$

Tomamos logaritmos en (I)

$$\log x^8 = \log \left[\frac{7 \cdot \sqrt[3]{2}}{(10)(11) \cdot \sqrt[3]{6758690}} \right]$$

$$\rightarrow 8 \log x = \log 7 + \frac{1}{3} \log 2 - \log 10 - \log 11 - \frac{1}{3} \log (6758690)$$

$$\rightarrow 8 \log x = 0,845098 + \frac{1}{3}(0,301030) - \left[1 + 1,041392 + \frac{1}{3}(6,829862) \right]$$

$$\rightarrow 8 \log x = 0,9454413 - 4,3180126 = -3,3725713$$

$$\rightarrow \log x = \frac{-3,3725713}{8} = -0,421571$$

$$\therefore x = 10^{-0,421571} \approx 0,3788166$$

Clave **B**

PROBLEMA N.º 79

Resuelva la ecuación exponencial

$$2^{(0,5)^{(1,5)^x}} = 8$$

e indique el valor de x .

- A) $-1,58496$
- B) $\log(\log 2)$
- C) $\log_2(\log 3/2)$
- D) $\log_{0,5} 3$
- E) No existe valor real de x .

Resolución

Escribimos la ecuación exponencial así

$$2^{(0,5)^{(1,5)^x}} = 2^3$$

$$\rightarrow (0,5)^{(1,5)^x} = 3$$

$$\rightarrow (0,5)^{(1,5)^x} = (0,5)^{\log_{(0,5)} 3}$$

$$\rightarrow (1,5)^x = \log_{(0,5)} 3$$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \log_{\frac{1}{2}} 3$$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^x}_{(+)} = \underbrace{-\log_2 3}_{(-)} \quad \text{iAbsurdo!}$$

$$\therefore x \in \emptyset$$

PROBLEMA N.º 80

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^y = y^x; \\ x^p = y^q \end{cases}$$

e indique el valor de y .

- A) $\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p-q}}$
- B) $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$
- C) $\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}}$
- D) $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p}}$
- E) $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}$

Resolución

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} x^y = y^x & \text{(I)} \\ x^p = y^q & \text{(II)} \end{cases}$$

En (I) elevamos a la p y usamos (II)

$$x^{p \cdot y} = y^{p \cdot x} \rightarrow y^{q \cdot y} = y^{p \cdot x}$$

$$\rightarrow qy = px \rightarrow x = \frac{q}{p} \cdot y \quad \text{(III)}$$

De (II) despejamos, luego usamos (III)

$$\rightarrow x = y^{\frac{q}{p}} \rightarrow \frac{q}{p} y = y^{\frac{q}{p}}$$

$$\rightarrow y^{\frac{q}{p}-1} = \frac{q}{p} \rightarrow y^{\frac{q-p}{p}} = \frac{q}{p}$$

$$\therefore y = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}}$$

Clave **E**

Clave